

Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Fakulty hospodárskej informatiky EU v Bratislave



a

Katedra ekonometrie
Fakulty informatiky a statistiky VŠE v Prahe



MEDZINÁRODNÝ SEMINÁR MLADÝCH VEDECKÝCH PRACOVNÍKOV

Katedry ekonometrie FIS VŠE v Praze

a

Katedry operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

ZBORNÍK

29. – 30. november 2007

29. – 30. listopad 2007

Praha

Programový výbor – recenzenti:

prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., VŠE Praha
prof. Ing. Michal Fendek, PhD., EU Bratislava
prof. Ing. Zlatica Ivaničová, PhD., EU Bratislava
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., VŠE Praha
doc. Ing. Ivan Brezina, CSc., EU Bratislava
prof. RNDr. Jan Pelikán, CSc., VŠE Praha
Mgr. Juraj Pekár, PhD., EU Bratislava

Organizačný výbor:

Ing. Karol Szomolányi, PhD.
Ing. Martin Lukáčik, PhD.
Ing. Jan Fábry, PhD.
doc. dr. Ing. Martin Dlouhý, PhD.

Kontakt:

ssov@euba.sk

Editor: Marian Reiff

Web editor: Martin Lukáčik

Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave, Dolnozemska
cesta 1, 852 35 Bratislava a Fakulta informatiky a statistiky
VŠE v Prahe, nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

© Ekonomická univerzita v Bratislave,
Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2008

ISBN 978-80-225-2498-8

Obsah

Zuzana Čičková:	Optimalizácia rozvozu materiálu	4
Andrea Furková:	Časovo premenlivá nákladová efektívnosť v panelových modeloch nákladových hraníc	10
Lucia Horáčková, Andrej Chu:	Suboptimálne postupy pri riešení rozvozného problému s delenou dodávkou	16
Michaela Chocholatá:	Využitie cenového rozpätia pri analýze volatility	21
Šárka Lejnarová:	Modely diskrétní binární volby	29
Zdenka Milánová:	Automatizácia viacfaktorových úloh výberu portfólia	39
Juraj Pekár:	Konštrukcia množiny investičných príležitosti z fondov ESPA	46
Adéla Ráčková:	Aplikace modifikovaného IS-MP-IA modelu ekonomiky ČR v prognózování	51
Kvetoslava Surmanová:	Ekonometrické prognózovanie vývoja miezd vo vybraných krajinách EÚ	63
Branislav Tuš:	Porovnanie výnosu a rizika garantovaných stratégií	70

OPTIMALIZÁCIA ROZVOZU MATERIÁLU

OPTIMIZATION OF MATERIAL DISTRIBUTION

Zuzana Čičková

Abstrakt

Úloha obchodného cestujúceho je jednou z najznámejších úloh nielen z hľadiska teórie operačného výskumu, ale aj pre význam vyplývajúci z jej možných praktických aplikácií. Predkladaný príspevok sumarizuje možné modifikácie úlohy obchodného cestujúceho.

***Kľúčové slová:** úloha obchodného cestujúceho, okružná úloha, úloha rozvozu a zvozu materiálu*

Abstract

The Traveling Salesman Problem is one of the most discussed problems in operation research, not only in theory, but also because the special transformation of that problem showed that the problem can be applied in more general way. This article describes related problems and its variants.

***Keywords:** Traveling Salesman Problem, Vehicle Routing Problem*

1 OKRUŽNÉ ÚLOHY

Podstatou úlohy o obchodnom cestujúcom je nájsť optimálnu, t.j. najkratšiu, najrýchlejšiu alebo v inom zmysle najmenej nákladnú okružnú cestu, ktorá spočíva v prepojení určitého počtu miest. Najčastejšie uvažujeme o odberateľoch tak, že začiatkové aj konečné miesto, sídlo dodávateľa, je totožné a každé miesto spotreby je v okružnej ceste zahrnuté práve raz. V takejto formulácii úlohy obchodného cestujúceho sa uvažuje len s jedným obchodným cestujúcim, resp. len s jedným vozidlom. Predpokladá sa, že kapacita tohto vozidla je dostatočne veľká na to, aby boli splnené požiadavky všetkých odberateľov. Vo všeobecnosti však firma môže mať veľké množstvo odberateľov, ktorých požiadavky presahujú kapacitu jedného vozidla alebo musí rešpektovať iné obmedzenia týkajúce sa napr. času obsluhy zákazníka a pod.. Úloha takéhoto typu je niekedy zaraďovaná do kategórie úloh obchodného cestujúceho so špeciálnou štruktúrou (Müller, 1970), alebo je tento problém označovaný pojmom úloha okružných jász (Vehicle Routing Problem) (Janáček, 1995). V tomto článku budeme používať jednoduchý názov: okružná úloha. Ak uvažujeme s väčším počtom vozidiel, skúmanú úlohu možno nazvať úloha viacnásobného obchodného cestujúceho (Multiple Salesman Problem). V takýchto prípadoch musí firma disponovať väčším množstvom vozidiel a snažiť sa určiť také okružné trasy týchto vozidiel, aby bolo zabezpečené splnenie požiadaviek všetkých odberateľov a zároveň, aby celková dĺžka okružných ciest absolvovaná jednotlivými vozidlami bola minimálna. Pri takejto úlohe je často za minimalizačné kritérium, okrem celkovej vzdialenosti, považovaný tiež počet vozidiel.

Ďalšou možnou modifikáciou úlohy obchodného cestujúceho je úloha priberčivého obchodného cestujúceho (Pončák, 2005), keď množina jednotlivých miest je rozdelená do podmnožín, pričom v každej z podmnožín je nutné navštíviť práve jeden uzol. Ak uvažujeme, že v každom stredisku je dostupných viac druhov tovarov, pričom ich cena sa mení od strediska k stredisku, a súčasne disponujeme jedným vozidlom, s cieľom zaobstarať celú paletu tovarov, ide o úlohu obchodného cestujúceho nakupujúceho komodity (Traveling

Pursacher Problem) (Pončák,2005). V tejto úlohe je cieľom nielen minimalizovať cestovné náklady, ale aj náklady na nákup tovarov.

K možným modifikáciám okružnej úlohy môžeme zahrnúť aj okružné úlohy s časovými oknami (Vehicle Routing Problem with Time Windows), keď úlohou je priradiť okružnej ceste časový plán, vrátane časových okamihov, v ktorých začne obsluha každého zo zákazníkov, ktorá prebehne počas špecifikovanej časovej periódy. Podľa (Cordeau, 2001), časové okno pritom môže byť “hard” alebo “soft”. V prvom prípade môže vozidlo počkať, ak príde k zákazníkovi príliš skoro, pričom obsluha nemôže byť uskutočnená po určitom čase. V druhom prípade môže byť časové okno porušené v spojení s určitými dodatočnými nákladmi. Jednou z ďalších možných aplikácií okružných úloh je úloha vytvoriť periodický plán rozvozu v závislosti na dennom pláne. Táto úloha sa nazýva periodická okružná úloha (Period Vehicle Routing Problem), ktorá je alokačno – okružným problémom. Alokačná časť zahŕňa priradenie zákazníkov ku dňu periódy, zatiaľ čo okružná cesta býva zvyčajne jednodenná.

Za posledné dve desaťročia sa pre vzrastajúce praktické využitie venuje veľká pozornosť modifikácii danej úlohy pre rozvoz a zvoz materiálu (napr. pri rozvoze nápojov sa uvažuje aj so zberom prázdnych fliaš). Úloha je známa pod názvom periodická okružná úloha pre rozvoz a zvoz (Period Vehicle Routing Problem with Simultaneous Delivery and Pickup) (Chalasan,1995). Známe sú tiež okružné úlohy s viacerými strediskami (Multi Depot Vehicle Routing Problem) (Irnich,2000), keď každé vozidlo vychádza z jedného z množiny viacerých stredísk a jeho trasa musí končiť v tom istom stredisku. Požiadavka každého zo zákazníkov môže byť pritom uspokojená viac ako jedným dopravným prostriedkom. Častý je aj prípad, keď požiadavka zákazníka presahuje kapacitu vozidla (hromadné prepravy). Inou modifikáciou je prípad, keď je výhodnejšie (lacnejšie) navštíviť jedného zákazníka viac ako raz. Veľa spoločností pracuje na princípe monitorovania zásob u každého zo zákazníkov a podľa toho sa rozhoduje o čase a veľkosti dodávky. S týmto prípadom sa stretávame najmä v petrochemickom a plynárenskom priemysle. Súvisiaca úloha je známa pod pojmom zásobná okružná úloha (Inventory Vehicles Routing Problem) (Campbell,2002). V princípe v nej ide o opakovanú distribúciu tovaru k množine zákazníkov v danom časovom horizonte, pričom je známa lokálna úroveň zásob každého zo zákazníkov.

Hoci v teórii je častým predpokladom homogenita dopravného parku, v praxi je bežný skôr prípad odlišných vozidiel s rôznou kapacitou, iným vekom, alebo odlišnými ďalšími parametrami. Takéto predpoklady zohľadňuje okružná úloha s heterogénnym dopravným parkom (Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem) (Burchett, 2002). Účelom zvyčajne nie je len minimalizácia celkovej vzdialenosti, ale aj minimalizácia celkových nákladov na vozidlá.

Väčšina existujúcich úloh rieši problémy statickej a deterministickej povahy. Vzrastajúce očakávania zákazníkov, dostupnosť aktuálnych informácií, napr. o dopravných sieťach, možnosti „on – line“ nákupov, viedli k tvorbe dynamických a stochastických modelov s ohľadom na požiadavky praxe, keď je potrebné riešiť situácie bez znalosti všetkých potrebných informácií. Tieto skutočnosti zohľadňuje stochastická okružná úloha (Stochastic Vehicle Routing Problem) (Kleywegt, 2002). Stochastická povaha nadobúda rôzne formy. Čas, miesto, veľkosť dodávky, ale aj otváracie hodiny sú často náhodnou veličinou. Tu sa stretávame s dvoma skupinami modelov. Pre prvú skupinu je typická optimalizácia (a priori) s použitím modelov a až potom sa zohľadňujú informácie týkajúce sa náhodnej povahy premenných. Druhá skupina je založená na prvotnom rozhodnutí a postupnom zaznamenávaní účinkov týchto rozhodnutí z hľadiska dlhodobějšího horizontu.

Z uvedeného je zrejmé, že vo všeobecnosti okružná úloha musí spĺňať viacero obmedzení, ktoré môžeme klasifikovať podľa toho, či sa týkajú vozidiel alebo zákazníkov. V aplikáciách sa, samozrejme, neuvažuje so všetkými obmedzeniami súčasne, ale potenciálne sa môžu objaviť nasledovné (Beasley, 2003):

1 ohraničenia týkajúce sa dopravných prostriedkov:

- každý dopravný prostriedok má limitovanú kapacitu (napr. môže viesť len obmedzené množstvo tovaru alebo osôb)
- každé z vozidiel má určený absolútny čas prevádzky (typické je obmedzenie možných hodín jazdy vodiča)
- každé z vozidiel má určený čas, kedy musí opustiť stredisko (napr. musí uvoľniť miesto prichádzajúcim vozidlám)
- každé z vozidiel má určené časové periódy, počas ktorých nie je v prevádzke (napr. prestávky vodiča)
- pre každé z vozidiel sú určené náklady spojené s jeho použitím (prevádzkové náklady)

2 ohraničenia týkajúce sa zákazníkov:

- každý zo zákazníkov požaduje dovoz resp. odvoz určitého množstva tovaru, kde uvažujeme buď o typickom rozvoze (napr. pre lokálne obchody), alebo len o zbere alebo zvoze (napr. keď uvažujeme o poštových schránkach alebo o zbere odpadu), prípadne úloha môže byť kombináciou oboch typov, tzv. úlohy rozvozu a zvozu, pričom množstvo môže byť určené deterministicky alebo stochasticky
- u každého zákazníka je známy čas, v ktorom je možné uskutočniť obsluhu, ide o už spomínané časové okno, pričom sa zohľadňuje čas prevádzky, resp. čas prestávky
- každý zo zákazníkov môže byť obslužený len určitým typom vozidla
- pre každého zo zákazníkov môže byť určená priorita obsluhy
- zákazník môže byť obslužený jedným, alebo viacerými vozidlami.

3 ohraničenia týkajúce sa iných faktorov:

- vozidlo môže denne uskutočniť viacero jazd alebo len jednu jazdu
- jedna jazda môže trvať jeden, alebo viacero dní
- rôzne typy vozidiel sa môžu používať na prepravu jedného alebo rôznych druhov tovarov
- vozidlá môžu vychádzať a vrátiť sa len do jedného alebo do viacerých stredísk dopravnej siete

V závislosti od skúmanej úlohy je možné použiť viacero typov optimalizačných kritérií:

- minimalizácia fixných nákladov (napr. minimalizácia počtu použitých vozidiel)
- minimalizácia variabilnej zložky nákladov (napr. minimalizácia celkovej najazdenej vzdialenosti alebo celkového času potrebného na prepravu)

- minimalizácia celkových nákladov (určitá kombinácia predchádzajúcich dvoch typov)

2 PRAKTICKÉ APLIKÁCIE

Úloha o obchodnom cestujúcom sa objavuje vo veľkom počte dopravných a logistických aplikácií. Z úloh riešených v minulosti spomenieme plánovanie ciest školských autobusov, rozvrhovanie servisných služieb vo firmách, donáškové služby, plánovanie práce strojov vo veľkoskladoch a mnoho ďalších (Moscato, 2005). Veľký záujem o TSP nie je založený len na aplikáciách s cieľom minimalizovať cestovné náklady. Dôležitosť tejto úlohy vychádza z využitia riešenia pre úlohy, ktoré na prvý pohľad nemajú žiadnu súvislosť s cestovnými trasami. Pritom mnoho reálnych problémov možno formulovať pomocou TSP. Všestrannosť použitia môžeme ilustrovať na nasledujúcich príkladoch:

- Vŕtanie dier pre elektrické obvody na plošné spoje (Metelco, 2005), (Nemhauser, 1995), (Skorobohatyj, 2005). Táto aplikácia TSP je dôležitou aplikáciou vo výrobnom priemysle, keď sa spájajú vodiče vo viacerých vrstvách alebo sa spájajú so svorkou v integrovanom obvode. Pretože je potrebné vŕtať cez panel diery s rôznymi priermi, je nevyhnutné meniť vŕtacie zariadenie. Jednotlivé úlohy TSP predstavujú vŕtanie dier rovnakého priemeru, pričom úlohou je minimalizovať celkový strojový čas.
- Kryštalografia (Nemhauser, 1995), (Skorobohatyj, 2005). Táto aplikácia sa objavuje pri skúmaní štruktúry kryštálov cez odraz X-lúčov pri rôznych pozíciách kryštálu. TSP sa využíva k skúmaniu rôznych pozícií kryštálu, pričom sa minimalizuje celkový čas potrebný k práci stroja, ktorý otáčanie kryštálu zabezpečuje.
- Elektroinštalácia počítačov (Nemhauser, 1995). Pomocou TSP sa optimalizuje rozloženie komponentov na matičnej doske počítača, pričom jednotlivé moduly, ktoré sú súčasťou matičnej dosky, sú pripojené k viacerým svorkám. Ku každej svorke súčasne nemôžu byť pripojené viac ako dva elektrické obvody.
- Ovládanie priemyselných robotov (Dolgui, 2004). Aplikácia TSP vo výrobnom priemysle, keď jeden robot má vykonať viac na seba nadväzujúcich pracovných úkonov. Úlohou je navrhnuť jednotlivé úkony tak, aby sa znížil celkový výrobný čas.
- Zoraďovanie genómov (Reinelt, 2005). Táto aplikácia TSP bola prispôbená vedcami vo Francúzsku, ktorí vyvíjali mapu myšacieho genómu. Práca spočívala v konštrukcii radiačno-hybridných máp pri zoraďovaní genómov a pomocou TSP sa integrovali lokálne mapy do jedinej radiačno – hybridnej mapy pre daný genóm (mestá predstavujú lokálne mapy a náklady cesty určujú pravdepodobnosti, že jedna lokálna mapa bezprostredne nasleduje ďalšiu).
- Optimalizácia reťazových obrazcov (Reinelt, 2005). Aplikácia využívaná pri návrhu reťazových obrazcov integrovaných obvodov, keď reťazové obrazce sú kanáliky umiestnené na čipe pre testovacie účely a cieľom je z časových a výkonnostných dôvodov minimalizovať ich dĺžku.
- Starlight Interferometer Program (Reinelt, 2005). Cieľom aplikácie bolo optimalizovať sekvenciu nebeských objektov, ktorá bola zobrazovaná v navrhovanom vesmírnom Starlight interferometer programe. Cieľom štúdie bolo minimalizovať spotrebu paliva pri zamieriavaní a zachytávaní manévrov pre pár satelitov použitých v misii (mestá sú nebeské objekty, ktoré majú byť zobrazené a náklady na cestu predstavuje palivo potrebné pre premiestnenie týchto dvoch satelitov z jedného snímku na ďalší).

- Navrhovanie tzv. sonet okruhov (Reinelt, 2005). Návrh vláknových optických sietí vo firme Bell Communications Research. TSP aspekt problému vychádza z vyhľadania sonet okruhov, ktoré poskytujú komunikačné linky medzi skupinou lokalít organizovaných v kruhu. Kruhová štruktúra poskytuje záložný mechanizmus v prípade zlyhania linky, keďže dáta môžu byť presmerované opačným smerom.
- Elektrické rozvodné siete (Reinelt, 2005). Lokalizácia káblových rozvodov na dodávku energie elektronickým zariadeniam, ktoré sú prostredníctvom optických vlákien spojené s domácnosťami.

Použitá literatúra

1. BURCHETT, D. - CAMPION, E.2002. Mix Fleet Vehicle Routing Problem - An Application of Tabu Search in the Grocery Delivery Industry. Research Paper, University of Canterbury, New Zealand, 2002.
2. CAMPBELL, A. - SAVELSBERGH, M. – CLARKE, L.2002. Inventory Routing in Practice. In: The Vehicle Routing Problem, P.Toth and D.Vigo (eds.), SIAM monographs on discrete mathematics and applications, 2002.
3. CORDEAU, J. F. - DESAULNIERS, G. - DESROSIERS, J. – SOLOMON, M.M.2001. The VRP with Time Windows. In: The Vehicle Routing Problem, Paolo Toth and Daniele Vigo (eds), SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 2001.
4. DOLGUI, A. - PASHKEVICH, A.2004. Cluster-Level Operations Planning in Arc-Welding Robotic Cell with Position Table. Research Report, G21, Ecole Nationale Supérieure des Mines, November, 2004.
5. FÁBRY, J.2006. Dynamické okružní a rozvozní úlohy. Doktorská disertační práce, Katedra ekonometrie, Fakulta informatiky a statistiky, Vysoká škola ekonomická v Praze, Praha, 2006.
6. CHALASANI, P. – MOTWANI, R.1995. Approximating Capacitated Routing and Delivery Problems. In: SIAM Journal on Computing 28, 1995.
7. IRNICH, S.2000. A Multi-Depot Pickup and Delivery Problem with a Single Hub and Heterogenous Vehicles. In: European Journal of Operational Research 122, 2000.
8. JANÁČEK, J.1995. Optimalizace okružních jízd. Žilina, Vysoká škola dopravy a spojov,habilitačná práca, 1995.
9. KLEYWEGT, A.J. – NORI, V.S. – SAVELSBERGH, M.W.P.2002. Dynamic Programming Approximations for a Stochastic Inventory Routing Problem. Working paper, School of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA, 2002.
10. MÜLLER – MERBACH, H.1970. Optimale Reihenfolgen. Berlin Heidelberg New York, Springer ,Verlag, 1970.
11. NEMHAUSER, G.L. – RINNOOY, A. H.G.1995. Network models, Handbooks in Operations Research and Management Science. In: ELSEVIER, Amsterdam-Lausanne-New York-Oxford-Shannon-Tokyo, Volume 7, 1995.
12. PONČÁK, M.2005. Niektoré varianty úloh kombinatorickej optimalizácie. Dizertačná práca, Fakulta riadenia a informatiky, ŽU, Žilina, 2005.

Internet:

13. BEASLEY, J. E. OR- Notes
<http://www.ms.ic.ac.uk/jeb/or/vrp.html> (platnák 31. 3. 2003)

14. METELCO, S. A. : Efficient Drilling of Printed Circuit Boards
http://www.hsor.org/case_studies.cfm?name=metelco_greece (platné k 24.10. 2005)
15. MOSCATO,P.: TSPBIB Home Page
http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/TSPBIB_home.html (platné k 24. 10. 2005)
16. REINELT, G.: TSPLIB
<http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/>
(platné k 24. 10. 2005)
17. Skorobohatyj, G.: MP-TESTDATA: The TSPLIB Symmetric Traveling Salesman Problem Instances
<http://elib.zib.de/pub/Packages/mp-testdata/tsp/tsplib/tsp/> (platné k 24.10. 2005)

Kontaktné údaje

Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 820

email: cickova@euba.sk

ČASOVO PREMENLIVÁ NÁKLADOVÁ EFEKTÍVNOST V PANELOVÝCH MODELOCH NÁKLADOVÝCH HRANÍC

TIME – VARYING COST EFFICIENCY IN PANEL DATA COST FRONTIER MODELS

Andrea Furková

Abstrakt

Príspevok sa zaoberá parametrickým prístupom (Analýza stochastickej hranice) na odhad nákladovej efektívnosti. Pozornosť bola sústredená na modely panelových dát s časovo premenlivou nákladovou efektívnosťou, nakoľko čím dlhší je panel údajov, tým viac je žiaduce relaxovať predpoklad o konštantnosti efektívnosti v čase. Je možné upustiť od tohto predpokladu avšak za cenu odhadu dodatočným parametrov.

Kľúčové slová: *nákladová efektívnosť, časovo premenlivá nákladová efektívnosť, panelové modely stochastických nákladových hraníc*

Abstract

This paper discusses parametric approach (Stochastic Frontier Analysis) for cost efficiency estimation. We concentrate our attention on panel data models with time-varying cost efficiency because the longer the panel, the more desirable it is to relax the assumption of constant cost efficiency in time. It is possible to do so, although at the cost of additional parameters to be estimated.

Keywords: *cost efficiency, time – varying cost efficiency, panel data cost frontier models*

1 ÚVOD

Pôvodné modely na odhad parametrickej hranice efektívnosti, či už hranice produkčnej alebo nákladovej sú často označované ako modely s deterministickou hranicou, pretože tieto modely špecifikujú iba jednostranný poruchový člen predstavujúci neefektívnosť. Tieto modely sú založené na odhade metódou najmenších štvorcov (MNS). Druhú skupinu modelov hraníc označujeme ako stochastické modely hraníc, pretože pridávajú dodatočný člen do deterministickej hranice. Existujú dve skupiny modelov stochastických hraníc, ktoré rozlišujeme v závislosti od povahy dát. Ak máme k dispozícii iba jedno pozorovanie za každú sledovanú jednotku, potom môžeme použiť prierezový model na odhad parametrov a na odhad neefektívnosti. Prierezové modely nerozlišujú medzi neefektívnosťou a tzv. heterogenitou sledovanej jednotky. Na prekonanie tohto problému boli navrhnuté modely panelových dát. Panel sa skladá z dát za rôzne jednotky, ktoré sú sledované v rôznych časových obdobiach. Keďže panelový model obsahuje viac informácií o jednotkách, tieto modely nám dovoľujú rozlišovať medzi neefektívnosťou a špecifickou heterogenitou sledovanej jednotky. V závislosti na predpoklade o rozdelení člena neefektívnosti môžeme použiť rôzne metódy odhadu. Taktiež je možné špecifikovať časovo invariantný a časovo meniaci sa člen neefektívnosti v panelových dátach. Práve panelovým modelom s časovo

meniacim sa členom neefektívnosti sme sa rozhodli venovať pozornosť v tomto príspevku nakoľko predpoklad, o konštantnosti efektívnosti v čase je reštriktívny predpoklad. Obzvlášť ak uvažujeme o konkurenčnom prostredí, je ťažko akceptovateľné, že efektívnosť zostáva konštantná v dlhšom časovom horizonte

2 PANELOVÉ MODELY STOCHASTICKÝCH NÁKLADOVÝCH HRANÍC

Panel údajov (opakované pozorovania pre každú sledovanú jednotku) obyčajne obsahuje viac pozorovaní ako súbor prierezových údajov čo umožňuje získať efektívnejšie odhady neznámych parametrov a efektívnejšie predikcie nákladovej efektívnosti. Použitie panelových dát umožňuje ustúpiť od niektorých silných predpokladov o rozdeleniach použitých v modeloch s prierezovými údajmi a použitie panelových dát prináša aj iné výhody (bližšie pozri [Schmidt a Sickles (1984)]). Aplikácia panelových dát na odhad stochastickej nákladovej hranice je obdobná ako pri odhade modelov stochastickej produkčnej hranice (bližšie pozri napr. [Kumbhakar a Lovell (2000)]).

Budeme vychádzať z predpokladu, že panelové dáta sú vyrovnané, v takom zmysle, že každá sledovaná jednotka má T pozorovaní. Nevyrovnané panely, pri ktorých máme k dispozícii $T_i \leq T$ pozorovaní (pričom nie všetky T_i sú rovnaké) je možné prispôsobiť pre všetky uvedené panelové modely nákladových hraníc.

Jedna z možností ako môžeme uvažovať o člene neefektívnosti (z hľadiska času) v panelových modeloch nákladových hraníc je, že predpokladáme

$$u_{it} = u_i \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

kde o u_i môžeme uvažovať ako o fixnom parametri alebo o náhodnej premennej, tieto modely sú známe ako modely s fixnými vplyvmi a modely s náhodnými vplyvmi. Uvažujeme teda, že nákladová efektívnosť je konštantná v čase a tiež predpokladáme, že deterministické jadro stochastickej nákladovej hranice má Cobb-Douglasov funkčný tvar. Na základe týchto predpokladov môžeme panelový model nákladovej hranice vyjadriť nasledujúco:

$$\ln C_{it} = \beta_0 + \beta_y \ln y_{it} + \sum_n \beta_n \ln w_{nit} + v_{it} + u_i \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (2)$$

kde $\ln C_{it}$ je logaritmus nákladov, $\ln w_{it}$ a $\ln y_{it}$ sú logaritmy cien vstupov a hodnôt výstupov, β je vektor neznámych parametrov, v_{it} je obojstranná (symetrická) náhodná zložka a u_i predstavuje časovo invariantnú nákladovú neefektívnosť zloženého poruchového člena $\varepsilon_{it} = v_{it} + u_i$.

Na odhad neznámych parametrov a dvoch zložiek zloženého poruchového člena modelu naformulovaného v (2) môžeme použiť metódu maximálnej vierohodnosti, metódu momentov alebo zovšeobecnenú metódu maximálnej vierohodnosti. V prípadoch odhadu modelu metódou maximálnej vierohodnosti alebo metódou momentov môžeme použiť JLMS dekompozíciu (bližšie pozri [Jondrow, Lovell, Materov a Schmidt (1982)]) na separovanie náhodnej zložky od nákladovej neefektívnosti v reziduáloch. Odhadnutý komponent nákladovej neefektívnosti môžeme potom dosadiť do vzťahu (3) aby sme získali špecifický odhad nákladovej efektívnosti sledovanej jednotky.

Ak predpokladáme, že nákladová hranica je stochastická, nákladovú efektívnosť i -tej sledovanej jednotky definujeme nasledujúco

$$CE_i = \frac{c(\mathbf{y}_{it}, \mathbf{w}_{it}, \beta) \exp\{v_{it}\}}{C_{it}} = \exp\{-u_i\} \quad (3)$$

kde nákladová efektívnosť je definovaná ako pomer minimálnych nákladov s ohľadom na náhodné šoky charakterizované ako $\exp\{v_i\}$ k skutočným nákladom.

3 PANELOVÉ MODELY STOCHASTICKÝCH NÁKLADOVÝCH HRANÍC - ČASOVO PREMENLIVÁ NÁKLADOVÁ EFEKTÍVNOSŤ

Relaxovať predpoklad o konštantnosti efektívnosti v čase je žiaduce najmä v prípade dlhších panelov dát. Je možné upustiť od tohto predpokladu, avšak za cenu odhadu ďalších dodatočných parametrov. Rovnako ako v modeli s časovo invariantnou nákladovou efektívnosťou, môžeme uplatniť dva prístupy odhadu modelu s časovo premenlivou nákladovou efektívnosťou: prístup, pri ktorom časovo premenlivá nákladová efektívnosť je modelovaná použitím fixných alebo náhodných vplyvov.

Ak povolíme zmeny efektívnosti v čase, člen neefektívnosti sa bude skladať z dvoch zložiek a to zo zložky prierezovej (u_i) a časovej (β_t):

$$u_{it} = u_i + \beta_t \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T. \quad (4)$$

Zložený poruchový člen modelu ε_{it} pozostávajúci teraz z troch komponentov môžeme zapísať nasledovne:

$$\varepsilon_{it} = u_i + \beta_t + v_{it}. \quad (5)$$

Cornwell, Schmidt a Sickles (CSS) [Cornwell, Schmidt a Sickles (1990)] a Kumbhakar [Kumbhakar (1990)] boli prví, ktorí navrhli panelový model stochastickej nákladovej hranice s časovo premenlivou nákladovou efektívnosťou. Model s časovo konštantnou nákladovou efektívnosťou vyjadrený v rovnici (2) sa zmení na:

$$\begin{aligned} \ln C_{it} &= \beta_{0t} + \beta_y \ln y_{it} + \sum_n \beta_n \ln w_{nit} + v_{it} + u_{it} \\ &= \beta_{it} + \beta_y \ln y_{it} + \sum_n \beta_n \ln w_{nit} + v_{it} \end{aligned} \quad (6)$$

kde β_{0t} je úrovňová konštanta nákladovej hranice spoločná pre všetkých výrobcov v čase t a β_{it} je úrovňová konštanta i -tej jednotky v čase t :

$$\beta_{it} = \beta_{0t} + u_{it} \quad (7)$$

Prvým krokom je odhad parametrov modelu a potom nasleduje odhad nákladovej efektívnosti sledovaných jednotiek. Keďže nie je možné odhadnúť všetky β_{it} , pretože by to znamenalo odhadnúť navyše $N \times T$ parametrov, CSS navrhli nasledujúci funkčný tvar:

$$\beta_{it} = \theta_{i1} + \theta_{i2}t + \theta_{i3}t^2 \quad (8)$$

čo redukuje počet navyše odhadnutých parametrov na $N \times 3$. Táto kvadratická špecifikácia povoľuje zmeny v nákladovej efektívnosti v čase jednotlivých jednotiek. Dosadením (8) do (7) a vyjadrením u_{it} dostaneme vzťah pre komponent neefektívnosti:

$$u_{it} = \theta_{i1} + \theta_{i2}t + \theta_{i3}t^2 - \beta_{0t}. \quad (9)$$

Ak $\theta_{i2} = \theta_{i3} = 0 \forall i$, tento model sa mení na model s časovo konštantnou nákladovou efektívnosťou, ktorý je popísaný v rovnici (2). Ak $\theta_{i2} = \theta_2 \forall i$ a $\theta_{i3} = \theta_3 \forall i$, tento model sa mení na model s fixnými vplyvmi s úrovňovou konštantou θ_{i1} a kvadratický člen v čase je spoločný pre všetkých výrobcov ($\theta_{i2}t + \theta_{i3}t^2$).

CSS opísali niekoľko stratégií odhadu modelu (6), ktoré zahŕňali prístup s fixnými vplyvmi aj prístup s náhodnými vplyvmi. Prístup s fixnými vplyvmi zavádza nasledujúce stratégie:

- vylúčiť u_{it} z rovnice (6), odhadnúť parametre β_n , β_y a na reziduály urobiť regresiu s konštantou, t a t^2 s cieľom získania odhadov $(\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3})$ pre každú jednotku. Potom sa pomocou týchto odhadov vypočítajú β_{it} z rovnice (8) a definuje sa $\hat{\beta}_{0t} = \min_i \left(\hat{\beta}_{it} \right)$ ako odhad úrovňovej konštanty alebo
- ak N/T je relatívne malé, zahrnieme u_{it} do rovnice (6), odhadneme θ_{i1} ako koeficienty umelých premenných pre každého výrobcu a θ_{i2} a θ_{i3} odhadneme ako koeficienty umelých premenných ovplyvňovaných t a t^2 . Potom urobíme odhady β_{it} a definujeme $\hat{\beta}_{0t} = \min_i \left\{ \hat{\beta}_{it} \right\}$ ako odhadnutú úrovňovú konštantu nákladovej hranice v čase t .

Nákladová efektívnosť každej jednotky v čase t je potom odhadnutá ako $CE_{it} = \exp \left\{ -\hat{u}_{it} \right\}$,

kde $\hat{u}_{it} = \left(\hat{\beta}_{it} - \hat{\beta}_{0t} \right)$. Preto v každom čase je najmenej jedna jednotka odhadnutá ako 100 % nákladovo efektívna, hoci najefektívnejšia jednotka sa môže meniť v čase.

Lee a Schmidt [Lee a Schmidt (1993)] navrhli alternatívnu formuláciu, v ktorej u_{it} v rovnici (6) sú špecifikované nasledujúco:

$$u_{it} = \beta(t)u_i \quad (10)$$

kde funkcia $\beta(t)$ je špecifikovaná ako množina časových umelých premenných β_t . V istom zmysle je tento model menej flexibilný ako CSS model, pretože obmedzuje časovú podobu u_{it} na rovnakú (β_t) pre všetky jednotky. Tento model je vhodný pre krátke panely, pretože vyžaduje odhad $T-1$ dodatočných parametrov umelých premenných.

Lee a Schmidt uvažovali o oboch modeloch s fixnými aj s náhodnými vplyvmi, v rámci ktorých môže byť časovo premenlivá nákladová efektívnosť odhadnutá. V oboch prístupoch β_t sú brané ako koeficienty (fixných alebo náhodných) efektov u_i . Ak β_t a u_i sú odhadnuté potom

$$\hat{u}_{it} = \left(\hat{\beta}_t \hat{u}_i \right) - \min_i \left\{ \hat{\beta}_t \hat{u}_i \right\} \quad (11)$$

a môžeme vypočítať $CE_i = \exp \left\{ -\hat{u}_{it} \right\}$.

Kumbhakar [Kumbhakar (1990)] špecifikoval $\beta(t)$ z rovnice (10) ako nasledujúcu parametrickú funkciu času:

$$\beta(t) = \left[1 + \exp \left\{ \gamma t + \delta t^2 \right\} \right]^{-1} \quad (12)$$

Model Kumbhakara obsahuje dva dodatočné parametre, ktoré musíme odhadnúť, γ a δ , kým v CSS modeli je počet dodatočných parametrov $N \times 3$ a model Lee a Schmidt obsahuje $T-1$ dodatočných parametrov. Kumbhakarova funkcia $\beta(t)$ má nasledujúce vlastnosti:

- (i) $0 \leq \beta(t) \leq 1$

(ii) $\beta(t)$ môže byť monotónne rastúca alebo klesajúca, konkávna alebo konvexná, v závislosti od znamienok a veľkosti dvoch parametrov γ a δ .

Môžeme otestovať aj hypotézu o časovo invariantnej nákladovej efektívnosti použitím hypotézy, že $\gamma = \delta = 0$, v ktorom prípade je $\beta(t) = 1/2$. Kumbhakar navrhol techniky maximálnej vierohodnosti na odhad modelu daného rovnicami (6), (10) a (12). Odhliadnuc od dvoch dodatočných parametrov, ktoré musíme odhadnúť, predpoklady o rozdelení v_{it} a u_i a odhadová procedúra sú rovnaké ako pri modeloch s efektívnosťou konštantnou v čase (bližšie pozri v [Kumbhakar a Lovell (2000)]).

Battese a Coelli [Battese a Coelli (1992)] vychádzali z predchádzajúceho modelu Kumbhakara a navrhli ďalší model s časovo meniacou sa nákladovou efektívnosťou. Ich model pozostáva opäť z rovníc (6) a (10) kde

$$\beta(t) = \exp\{-\eta(t-T)\} \quad (13)$$

Tento model má iba jeden dodatočný parameter η , ktorý musíme odhadnúť. Funkcia $\beta(t)$ má nasledujúce vlastnosti:

(i) $\beta(t) \geq 0$

(ii) $\beta(t)$ je klesajúca pre $\eta > 0$, rastúca pre $\eta < 0$ alebo zostáva konštantná pre $\eta = 0$, t. j. ak $\eta > 0$ člen neefektívnosti vždy klesá v čase a $\eta < 0$ implikuje, že neefektívnosť vždy rastie v čase. Battese a Coelli urobili predpoklady o rozdelení $u_i \sim \text{iid } N^+(\mu, \sigma_u^2)$ – zrezané normálne rozdelenie a použili metódu maximálnej vierohodnosti na získanie odhadov všetkých parametrov modelu.

Ak odhad modelu získame metódou maximálnej vierohodnosti, môžeme testovať zaujímavé hypotézy obdobne ako pri modeli Kumbhakara napríklad:

$H_0 : \eta = 0$ (implikuje časovo invariantnú efektívnosť),

$H_0 : \eta = \mu = 0$ (implikuje časovo invariantnú efektívnosť s polonormálnym rozdelením).

Nevýhodou modelu Kumbhakara a modelu Batteseho a Coelliho je, že komponent neefektívnosti musí spĺňať predpísaný funkčný tvar, ktorý môže alebo nemusí byť pravdivý. Obzvlášť v prípade modelu Batteseho a Coelliho, je vývoj komponentu neefektívnosti v čase monotónny, t. j. neefektívnosť rastie alebo klesá v čase konštantne, čo vo všeobecnosti nemusí platiť (obe funkcie nepovoľujú zmeny v usporiadaní sledovaných jednotiek v čase, ak sa jednotka umiestni na n -tom mieste v prvom období, tak je vždy umiestnená na n -tom mieste).

4 ZÁVER

Pôvodné panelové modely stochastických nákladových hraníc boli založené na predpoklade o konštantnosti efektívnosti v čase. Avšak čím dlhší máme panel údajov tým menej udržateľný sa stáva tento predpoklad. V príspevku sme venovali pozornosť modelom, ktoré umožňujú získať odhady efektívnosti meniacej sa v čase. Najväčšie zásluhy v tejto oblasti majú autori Cornwell, Schmidt a Sickles, Kumbhakar a Battese a Coelli, ktorí na relaxáciu predpokladu o konštantnosti efektívnosti navrhli rôzne funkcie času. Existencia takejto funkcie si samozrejme vyžaduje odhad dodatočných parametrov. Ak sa efektívnosť mení medzi sledovanými jednotkami alebo v čase je prirodzené hľadať determinanty týchto zmien. Tu vidíme ďalší možný rozvoj prezentovaných modelov.

Použitá literatúra

1. BATTESE, G. E., COELLI, T. J. (1992): Frontier Production Functions, Technical Efficiency and Panel Data: With Application to Paddy Farmers in India, *Journal of Productivity Analysis* 3 (1-2), 153 - 169.
2. CORNWELL, C., SCHMIDT, P., SICKLES, R. (1990): Production Frontiers with Cross - Sectional and Time - Series Variation in Efficiency Levels. *Journal of Econometrics* 46, 185 - 200.
3. FURKOVÁ, A. (2007): Analýza nákladovej efektívnosti slovenských a českých distribučných podnikov elektrickej energie, dizertačná práca, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave.
4. JONDROW, J., LOVELL, C. A. K., MATEROV, I. S., SCHMIDT, P. (1982): On the Estimation of Technical Inefficiency in the Stochastic Frontier Production Function Model, *Journal of Econometrics* 19 (2-3), 233 - 238.
5. KUMBHAKAR, S. C. (1990): Production Frontiers, Panel Data and Time - Varying Technical Inefficiency, *Journal of Econometrics* 46, 201 - 211.
6. KUMBHAKAR, S. C., LOVELL, C. A. K. (2000): *Stochastic Frontier Analysis*, Cambridge University Press.
7. LEE, Y. H., SCHMIDT, P. (1993): A Production Frontier Model with Flexible Temporal Variation in Technical Inefficiency, *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*, Oxford University Press.
8. SCHMIDT, P., SICKLES, R. (1984): Production Frontiers with Panel Data, *Journal of Business and Economic Statistics* 2 (4), 367 - 374.

Kontaktné údaje

Ing. Andrea Furková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska cesta 1/a, 852 35 Bratislava

Tel.: (421 2) 67 295 832

email: furkova@euba.sk

SUBOPTIMÁLNE POSTUPY PRI RIEŠENÍ ROZVOZNÉHO PROBLÉMU S DELENOU DODÁVKOU

SUBOPTIMAL APPROACHES TO SDVRP SOLVING

Lucia Horáčková, Andrej Chu

Abstrakt

Rozvozný problém s delenou dodávkou je modifikáciou rozvozného problému, ktorý je klasickou úlohou operačného výskumu. Spočíva v optimalizácii rozvozných trás v komunikačnej sieti obsahujúcej miesto počiatku všetkých trás a daný počet miest, ktorý je nutné zahrnúť do rozvozných trás, pričom každý zákazník môže byť obslužený viacerými vozidlami. Úlohou je minimalizovať prejazdenú vzdialenosť a obslúžiť všetkých zákazníkov. Rozvozný problém s delenou dodávkou patrí medzi NP obtiažne úlohy, preto boli pre úlohy väčšieho rozsahu navrhnuté tri heuristiky.

KLúčové slová: rozvozná úloha s delenou dodávkou, heuristické metódy, celočíselné programovanie

Abstract

The paper deals with a split delivery vehicle routing problem, which is a modification of a vehicle routing problem. It consists in delivery routes optimization in communications network containing initial city of all routes and a given number of places, which is necessary to include in delivery routes, where a customer can be served by more than one vehicle. The objective is to find a set of vehicle routes that serve all the customers and the total distance traveled is minimized. The split delivery vehicle routing problem is NP hard, therefore we present a solution approach by three heuristics.

Keywords: split delivery vehicle routing problem, heuristic methods, integer programming

1 ÚVOD

Okružné úlohy sú štandardným problémom operačného výskumu, ktoré majú v dnešnej dobe veľké využitie. Matematický model týchto úloh je hranovo ohodnotený graf $G = \{V, E\}$, v ktorom uzly predstavujú miesta a hrany komunikačnú sieť, pričom hrana (i, j) je ohodnotená číslom c_{ij} .

Cieľom rozvozného problému s delenou dodávkou (angl. Split delivery vehicle routing problem - SDVRP) je nájsť uzavreté cykly, ktoré obsahujú všetky uzly grafu aspoň raz a celkové ohodnotenie je najnižšie. Každý cyklus musí však obsahovať uzol, ktorý predstavuje východiskové miesto rozvozu.

Okrem podmienky, že cykly musia obsahovať všetky uzly, je tu aj kapacitné obmedzenie na každý cyklus, ktoré je zadané kapacitou vozidla V , $V > 0$. Označme q_i ako požiadavok i - tého uzlu ($i \neq 1$). Vzhľadom k obmedzenej kapacite vozidla V môže nastať situácia, keď požiadavok uzla $q_i > V$, t.j. nemôže byť obslužený žiadnym z vozidiel na trase, pretože by došlo k prekročeniu kapacity V . Za predpokladu, že tento požiadavok by mohol byť rozložený do niekoľkých častí, je nutné niektorých zo zákazníkov obslúžiť prostredníctvom niekoľkých

trás. Každý cyklus musí spĺňať podmienku, že súčet požiadavkov uzlov ležiacich na cykle neprekročí kapacitu vozidla V .

2 MATEMATICKÝ MODEL

Konštrukciu modelu budeme formulovať ako úlohu zvozu, ktorý sa realizuje vozidlom s kapacitou V a v každom uzle je treba naložiť q_i^k jednotiek produktu, pričom premenná q_i^k v modeli predstavuje časť požiadavku na i -tého zákazníka q_i , ktorá je odvezená vozidlom na trase k .

Označme binárnu premennú x_{ij}^k , ktorá je rovná 1, ak hrana (i, j) je obsiahnutá v riešení, čiže vozidlo pôjde z uzlu i do uzlu j na k -tej trase, v opačnom prípade je táto premenná rovná 0 a premenná $x_{ii}^k = 0$. Matica C udáva vzdialenosti a platí, že $C = \{c_{ij}\}$.

Účelová funkcia (1) predstavuje súčet ohodnotení všetkých hrán riešenia. Rovnica (3) zabezpečuje, že z uzlu i vychádza práve toľko hrán koľko do uzlu j vstupuje, pričom podmienka neplatí pre uzol 1. Nerovnosť (4) definuje premennú u_i^k , ktorá udáva veľkosť nákladu vozidla po návšteve uzlu i na trase k . Táto podmienka je použitá namiesto anticyklických podmienok. Podmienka (6) zabezpečuje, aby i -tý požiadavok nepresahoval kapacitu vozidla V na trase k . Podmienka (7) zaisťuje, aby vozidlá odviezli od každého zákazníka požadované množstvo. V prípade, že k -ta trasa nevedie cez i -ty uzol, potom sa na tejto trase z i -tého uzla nič neodváža, ale ak sa na k -tej trase z i -tého uzla odváža časť požiadavku $q_i > 0$, potom musí existovať aspoň jeden uzol, do ktorého vozidlo pôjde v rámci tejto trasy priamo z i -tého uzla, t.j. $x_{ij}^k = 1$ pre niektorý index j , čo vyjadruje nerovnosť (8).

Matematický model SDVRP (1)-(10):

$$\min \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^k \quad (1)$$

$$\sum_{j=2}^k x_{1j}^k \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}^k = \sum_{i=1}^n x_{ji}^k, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (3)$$

$$u_i^k + q_j^k - V(1 - x_{ij}^k) \leq u_j^k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 2, 3, \dots, n \quad i \neq j \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4)$$

$$u_1^k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (5)$$

$$q_i^k \leq u_i^k \leq V \quad i = 2, 3, \dots, n \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^K q_i^k = q_i \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (7)$$

$$0 \leq q_i^k \leq q_i \sum_{j=1}^n x_{ij}^k \quad i = 2, 3, \dots, n \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (8)$$

$$x_{ii}^k = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (9)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (10)$$

3 HEURISTICKÉ METÓDY

SDVRP patrí medzi NP obtiažne úlohy, preto bude pre riešenie úlohy väčšieho rozsahu vhodné navrhnúť heuristické metódy. Bude sa jednať o úpravu heuristických metód pre obchodného cestujúceho a to o metódu najbližšieho suseda, metódu výhodnostných čísiel a vkladáciu metódu.

Predpokladáme, že matica C je symetrická a nezáporná. Označme $M \in \{2, 3, \dots, n\}$ množinu uzlov, ktoré ešte neboli zahrnuté do žiadnej z trás. Na začiatku metódy bude množina M rovná $\{2, 3, \dots, n\}$. Heuristická metóda končí, ak množina M je prázdna. Pribeh trasy bude uložený do vektoru $tr = (tr(1), tr(2), \dots, tr(s))$, kde $tr(1) = tr(s) = 1$.

3.1 Metóda najbližšieho suseda

Vykonávame nasledujúce kroky, pokiaľ M nie je prázdna:

Krok 1. Pokiaľ M je jednoprvková, obsahujúca len uzol k a $q_k \leq V$, potom položíme $tr(1) = 1$, $tr(2) = k$, $tr(3) = 1$ a výpočet trasy končí. Inak označíme k uzol s najkratšou vzdialenosťou c_{1k} a vytvoríme trasu $tr(1) = 1$, $tr(2) = k$, $tr(3) = 1$, položíme $s = 3$. Ak $q_k \leq V$, uzol k odstránime z M , $V' = V - q_k$ a prejdeme na krok 2.

Ak $q_k > V$, uzol k v M ponecháme a zmení sa jeho požiadavka na p_k , kde p_k predstavuje časť požiadavky, ktorá presahovala kapacitu vozidla V , čiže $p_k = q_k - V$. Trasa je ukončená. Pokračujeme krokom 1, kapacita vozidla je V .

Krok 2. Hľadáme uzol k , ktorý minimalizuje vzdialenosť $c_{tr(s-1),k}$ a patrí do M . Ak pripočítanie q_k v uzle k neprekročí kapacitu vozidla V' , rozšírime trasu tr o uzol k vložením za uzol $tr(s-1)$. Zvýšime s o 1, uzol k odstránime z M .

Ak pripočítanie q_k prekročí kapacitu vozidla V' , rozšírime trasu tr o uzol k , vložením za uzol $tr(s-1)$, uzol k neodstránime z M , požiadavka uzla k sa zmení na p_k , $p_k = q_k - V'$. Trasa je ukončená, pokračujeme krokom 1.

Pokiaľ M je neprázdna, pokračujeme krokom 2, inak metóda končí.

3.2 Metóda výhodnostných čísiel

Vykonávame nasledujúce kroky, pokiaľ množina M nie je prázdna:

Krok 1. Ak M je jednoprvková, obsahujúca len uzol k , potom vytvoríme trasu $tr(1) = 1$, $tr(2) = k$, $tr(3) = 1$ a položíme $s = 3$. Ak požiadavka uzla k $q_k > V$, potom uzol k odstránime z M a výpočet trasy končí. Ak $q_k > V$, uzol k v M ponecháme a zmení sa jeho požiadavka na p_k , kde p_k predstavuje časť požiadavky, ktorá presahovala V , čiže $p_k = q_k - V$ a trasa je ukončená. Pokračujeme krokom 1, pričom kapacita vozidla je V .

Krok 2. Hľadáme dvojicu uzlov z M v tvare (k, l) , ktorá maximalizuje výhodnostné číslo $s_{ij} = c_{il} + c_{lj} - c_{ij}$. Vytvoríme trasu $tr(1) = 1$, $tr(2) = k$, $tr(3) = l$, $tr(4) = 1$ a položíme $s = 4$. Ak $q_k + q_l \leq V$, tak uzly k a l odstránime z množiny M a $V' = V - (q_k + q_l)$. Prejdeme na krok 3.

Ak $q_k + q_l > V$, označíme min index menšieho z dvojice (q_k, q_l) a max index väčšieho z dvojice (q_k, q_l) (ak $q_k = q_l$, položíme $min = k$ a $max = l$). Ak $q_{min} > V$, znížime q_{min} o V , inak $= V - q_{min}$, odstránime uzol min z M a znížime požiadavku q_{max} o V' . Trasa je ukončená a pokračujeme krokom 1.

Krok 3. Hľadáme uzol i z M , ktorý maximalizuje s_{ik} , resp. uzol j z M , ktorý maximalizuje s_{lj} . Ak $s_{ik} \geq s_{lj}$ (alebo j neexistuje), potom vložíme uzol i do trasy pred miesto k a ak $q_i \leq V'$ tak uzol i odstránime z M . Kapacita vozidla sa zmení na V'' , kde $V'' = V' - q_i$. Zvýšime s o 1 a za

k položíme i . Ak $q_i > V'$ tak uzol i v M ponecháme a $p_i = q_i - V'$. Trasa je ukončená, s zvýšime o 1 a za k položíme i .

Pokračujeme krokom 1.

Ak $s_{ik} < s_{lj}$ (alebo i neexistuje), potom vložíme uzol j do trasy za miesto l a ak $q_j \leq V'$, tak uzol j odstránime z množiny M . Kapacita vozidla sa zmení na V'' , kde $V'' = V' - q_j$. Zvýšime s o 1, a za l položíme j . Ak $q_j > V'$ tak uzol j v M ponecháme a zmení sa požiadavka uzla j na p_j , kde $p_j = q_j - V'$. Trasa je ukončená, s zvýšime o 1 a za l položíme j . Pokračujeme krokom 1.

Ak ani i a ani j neexistuje, potom trasa končí a pokračujeme krokom 1.

Pokiaľ M je neprázdna, pokračujeme krokom 3, inak metóda končí.

3.3 Vkladacia metóda

Pri vkladacej metóde vykonávame nasledujúce kroky pokiaľ M nie je prázdna:

Krok 1. Označíme uzol k s najväčšou vzdialenosťou c_{li} a vytvoríme trasu $tr(1) = 1, tr(2) = k, tr(3) = 1$, položíme $s = 3$. Ak požiadavka uzla k $q_k \leq V$, potom $V' = V - q_k$. Uzol k odstránime z M . Pokiaľ M je prázdna, výpočet končí.

Ak $q_k > V$, potom uzol k v M ponecháme, jeho požiadavka sa zmení na p_k , kde $p_k = q_k - V$. Pokračujeme krokom 1.

Krok 2. Hľadáme uzol k z M , ktoré minimalizuje číslo $d = c_{tr(i), k} + c_{k, tr(i+1)} - c_{tr(i), tr(i+1)}$ pre všetky $i=1,2,\dots, s-1$ a $k \in M$. Rozšírime trasu o uzol k vložením medzi uzol $tr(i)$ a $tr(i+1)$, kde i minimalizuje hodnotu d . Ak $q_k \leq V$, potom $V' = V - q_k$. Uzol k odstránime z M .

Ak $q_k > V$, potom uzol k v M ponecháme, jeho požiadavka sa zmení na p_k , kde $p_k = q_k - V$. Pokračujeme krokom 1. Ak neexistuje takýto uzol k , potom trasa je ukončená a pokračujeme krokom 1.

Pokiaľ M nie je prázdna, pokračujeme krokom 2, inak výpočet končí.

4 NUMERICKÉ EXPERIMENTY

Majme spolu 20 miest zo Slovenskej a Českej republiky, pričom Bratislava je východiskovým mestom, ktoré musí byť zahrnuté v každej trase. Trasy sa realizujú po cestnej sieti, kapacita vozidla V je vo všetkých prípadoch rovnaká tak ako aj veľkosť požiadaviek q_i . Navrhnuté heuristiky boli aplikované na 10 rôznych problémov s rôznym počtom miest.

Tabuľka 1. Výsledky aplikovaných heuristických metód na rozvozný problém s delenou dodávkou

p.č.	počet miest	metóda najbližšieho suseda (km)	počet trás	metóda výhodnostných čísiel (km)	počet trás	vkladacia metóda (km)	počet trás
1	10	3063	4	2520	4	2457	4
2	11	2555	4	1944	4	2245	4
3	11	2688	4	2398	4	2419	4
4	13	3804	5	3596	5	3471	5
5	14	4521	6	3558	6	3865	6
6	15	3463	5	3199	5	3150	5
7	17	4123	6	3746	6	3911	6
8	18	5163	7	4058	7	4476	7
9	19	4692	7	4320	7	4538	7
10	20	4667	7	4456	7	4725	7

5 ZÁVER

Po aplikácii heuristických metód na rôzne prípady rozvozných problémov s delenou dodávkou sme zistili, že najlepšie výsledky nám dáva metóda výhodnostných čísiel, pričom metóda najbližšieho suseda nie je vôbec vhodná na aplikáciu.

Výskum bol podporený grantom GAČR402/06/0123.

Použitá literatúra

1. Dror, M., Trudeau, P. Split Delivery Routing. *Naval Research Logistics*, 37: 383-402, 1990
2. Fábry, J. Dynamické okružní a rozvozní úlohy, disertační práce. Praha: VŠE-FIS, 2006
3. Pelikán, J. Diskrétní modely v operačním výzkumu. PROFESSIONAL PUBLISHING, 2001, ISBN 80-86419-17-7

Kontaktné údaje

Ing. Lucia Horáčková, Ing. Andrej Chu

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3, ČR

Tel: +420 608 92 66 98

email: horackol@vse.cz, chuandre@vse.cz

VYUŽITIE CENOVÉHO ROZPÄTIA PRI ANALÝZE VOLATILITY

USING OF PRICE RANGE BY VOLATILITY ANALYSIS

Michaela Chocholatá

Abstrakt

Príspevok sa zaoberá problematikou využitia cenového rozpätia pri analýze volatility finančných časových radov. Analýza bola vykonaná pre denné hodnoty rakúskeho burzového indexu ATX (The Austrian Traded Index) za obdobie 4.1.1999 – 28.12.2007 (t.j. 2221 hodnôt) v programovom systéme EViews 5.1. Výsledky poukazujú na úzku súvislosť rozptylu a procesov generujúcich maximálne a minimálne ceny aktíva.

Kľúčové slová: *cenové rozpätie, volatilita, finančné časové rady, burzový index ATX*

Abstract

The paper deals with the using of the price range by volatility analysis of financial time series. The analysis was done for daily values of the Austrian Traded Index ATX for the period 4 January 1999 – 28 December 2007 (i.e. 2221 values) in the econometric software EViews 5.1. The results support the narrow connection between the variance and processes generating high and low prices.

Keywords: *price range, volatility, financial time series, stock index ATX*

1 ÚVOD

Modelovanie rozptylu vysokofrekvenčných finančných časových radov (burzových indexov, výmenných kurzov a pod.) bolo, je a bude predmetom záujmu rôznych analytikov za účelom, čo najlepšie predpovedať vývoj ich hodnôt. V minulosti sa na analýzu vývoja časových radov používala predovšetkým Boxova – Jenkinsova metodológia ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) umožňujúca výpočet krátkodobých prognóz časového radu pomocou podmienených priemerov za predpokladu zachovania konštantného podmieneného rozptylu. Na nereálnosť predpokladu konštantnosti podmieneného rozptylu v prípade vysokofrekvenčných finančných časových radov ako prvý poukázal Engle (1982), ktorý navrhol model ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) pripúšťajúci nestacionaritu v rozptyle (t.j. volatilitu). O zovšeobecnenie modelu ARCH sa zaslúžil Bollerslev (1986) konštrukciou modelu GARCH (Generalized ARCH). S ďalšou modifikáciou modelu ARCH – modelom EGARCH (Exponential GARCH), ktorý umožňuje zachytenie rôzneho vplyvu kladných a záporných šokov na úroveň podmieneného rozptylu (t.j. asymetrických efektov), prišiel Nelson (1991). Hoci v súčasnosti existuje veľké množstvo rôznych modifikácií modelov volatility (viď napr. Arlt a Arltová (2003), Engle (1993), Franses a Dijk (2000)), Bollerslev, Chou a Kroner (1992) uvádzajú, že väčšina autorov zaoberajúca sa touto problematikou dospela k záveru, že model GARCH(1,1) možno považovať za excelentný model pre široké spektrum finančných časových radov.

Pri analýze rozptylu finančných časových radov (predovšetkým burzových indexov) sa možno stretnúť i s využitím tzv. estimátora cenového rozpätia¹ (price range estimator). Hoci Parkinson (1980) hovorí o tomto estimátore ako o ďaleko najefektívnejšom estimátore rozptylu, nie je príliš často používaným. Vzťah medzi trhovými výnosmi a rozptylom (t.j. dynamika vývoja rizikovej prémie), závisí podľa Lina a Rozeffa (1994) od toho, či investori formulujú racionálne očakávania ohľadom cien aktív. Táto dvojica autorov podrobne skúmala problematiku estimátora cenového rozpätia na príklade mesačných hodnôt indexu Dow Jones Industrial Average (DJIA), pričom dospela k výsledkom potvrdzujúcim oprávnenosť použitia cenového rozpätia pri odhade podmieneného rozptylu analyzovaného burzového indexu. Využitiu cenového rozpätia pri prognózovaní volatility sa venoval napríklad i Chou (2005), ktorý prišiel s modelom CARR (Conditional Autoregressive Range), ktorý predstavuje jednoduchý efektívny spôsob analýzy dynamiky volatility. Chou a Wang (2007) aplikovali model CARR pri prognózovaní volatility denných hodnôt britského burzového indexu FTSE 100.

Cieľom tohto príspevku je využitie cenového rozpätia pri analýze volatility denných hodnôt rakúskeho burzového indexu ATX (The Austrian Traded Index) za obdobie 4.1.1999 – 28.12.2007 (t.j. 2221 hodnôt) v programovom systéme EViews 5.1.

2 MODELOVANIE ROZPTYLU, VÝVOJ ROZPÄTIA „MAXIMÁLNA - MINIMÁLNA CENA“

Pri využití cenového rozpätia na modelovanie rozptylu je potrebné brať do úvahy skutočnosť, že v dôsledku definície cenového rozpätia ako rozdielu medzi maximálnou a minimálnou cenou aktíva, schopnosť prognózovať zmeny v rozptyle úzko súvisí s vlastnosťami maximálnych a minimálnych cien. Lin a Rozeff (1994) prezentovali model vyjadrujúci vzťah medzi rozptylom a maximálnymi a minimálnymi cenami. Vychádzali z Parkinsonovej definície estimátora rozptylu σ_t^2 (Parkinson (1980), Lin a Rozeff (1994)) v tvare

$$\sigma_t^2 = 0.393(E(Max_t - Min_t))^2 \quad (1)$$

Symbolom E je vo vzťahu (1) označený operátor strednej hodnoty, Max_t a Min_t sú logaritmy maximálnej a minimálnej ceny aktíva v období t . Cenové rozpätie $(Max_t - Min_t)$ možno chápať ako súčet dvoch komponentov, tzv. semirozpätí (Lin a Rozeff (1994)): $(Max_t - Zav_t)$ a $(Zav_t - Min_t)$, kde Zav_t je logaritmus záverečnej ceny aktíva v čase t . Ak budeme predpokladať, že semirozpätia majú charakter náhodnej prechádzky, možno ich vyjadriť nasledovnými vzťahmi

$$Max_t - Zav_t = Max_{t-1} - Zav_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

$$Zav_t - Min_t = Zav_{t-1} - Min_{t-1} + \xi_t \quad (3)$$

pričom ε_t a ξ_t sú rovnako rozdelené náhodné premenné s nulovou strednou hodnotou.

¹ Cenové rozpätie možno definovať ako rozdiel medzi maximálnou a minimálnou cenou aktíva (napr. burzového indexu) v konkrétnom časovom období, t.j. napr. v konkrétnom dni, týždni alebo mesiaci.

Predpokladajme ďalej, že logaritmus záverečnej ceny aktíva v čase t , Zav_t , má taktiež charakter náhodnej prechádzky, t.j.

$$Zav_t = \mu + Zav_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4)$$

kde μ je konštanta a ε_t má charakter náhodnej poruchy. Z predpokladu (4) vyplýva, že najlepšou prognózou budúcej ceny aktíva v čase t podmienené na cene aktíva v čase $(t-1)$ je cena aktíva v čase $(t-1)$ plus konštanta

$$E_{t-1}[Zav_t] = Zav_{t-1} + \mu \quad (5)$$

Vychádzajúc zo vzťahu (5), očakávané hodnoty logaritmov maximálnej a minimálnej ceny aktíva, Max_t a Min_t , podmienené na logaritme záverečnej ceny² aktíva v predchádzajúcom období, Zav_{t-1} , sú dané vzťahmi (6) a (7), v ktorých symbolom E_{t-1} označujeme operátor podmienenej strednej hodnoty

$$E_{t-1}[Max_t] = Zav_{t-1} + \mu + E_{t-1}[Max_t - Zav_t] \quad (6)$$

$$E_{t-1}[Min_t] = Zav_{t-1} + \mu + E_{t-1}[Min_t - Zav_t] \quad (7)$$

V súlade s Linom a Rozeffom (1994) ďalej predpokladajme, že očakávané zmeny v semirozpätíach sú funkciami odchýlok semirozpätí od ich nepodmienených očakávaných hodnôt

$$E_{t-1}[Max_t - Zav_t] = Max_{t-1} - Zav_{t-1} - \alpha \{Max_{t-1} - Zav_{t-1} - E[Max_t - Zav_t]\} \quad (8)$$

$$E_{t-1}[Min_t - Zav_t] = Min_{t-1} - Zav_{t-1} - \beta \{Min_{t-1} - Zav_{t-1} - E[Min_t - Zav_t]\} \quad (9)$$

pričom $E[Max_t - Zav_t]$ a $E[Min_t - Zav_t]$ predstavujú nepodmienené očakávané hodnoty rozpätí medzi maximálnymi a záverečnými cenami (horné semirozpätie) a minimálnymi a záverečnými cenami (dolné semirozpätie). Hodnoty koeficientov α a β sa pohybujú v intervale $\langle 0,1 \rangle$ a vypovedajú o stupni zotrvačnosti. Ak $\alpha = \beta = 0$, znamená to, že semirozpätia majú charakter náhodnej prechádzky a očakávané hodnoty sa rovnajú hodnotám z predchádzajúceho obdobia. Semirozpätia sa v tomto prípade vyznačujú zotrvačnosťou až do času, pokiaľ sa nevyskytne nový šok. Ak $\alpha = \beta = 1$, najlepšimi prognózami semirozpätí sú ich nepodmienené očakávané hodnoty. Semirozpätia sa nevyznačujú zotrvačnosťou, ale majú tendenciu vrátiť sa k svojej priemernej hodnote.

Po substitúcii podmienených očakávaní definovaných vzťahmi (8) a (9) do vzťahov (6), (7) dostávame

$$E_{t-1}[Max_t] = Max_{t-1} - \alpha \{Max_{t-1} - Zav_{t-1} - E[Max_t - Zav_t]\} + \mu \quad (10)$$

$$E_{t-1}[Min_t] = Min_{t-1} - \beta \{Min_{t-1} - Zav_{t-1} - E[Min_t - Zav_t]\} + \mu \quad (11)$$

² V ďalšom texte už nebudeme zdôrazňovať skutočnosť, že pracujeme s logaritmickeými transformáciami cien aktíva.

Ak $\alpha = \beta = 0$, maximálne i minimálne ceny majú charakter náhodnej prechádzky, rovnako ako záverečné ceny. Ak $\alpha = 1$, očakávaná maximálna cena je záverečná cena (upravená o konštantu) plus nepodmienené horné semirozpätie. Podobne, ak $\beta = 1$, očakávaná minimálna cena je záverečná cena (upravená o konštantu) plus nepodmienené dolné semirozpätie. Je zároveň nepravdepodobné, že maximálne a minimálne ceny majú charakter náhodnej prechádzky. Ak je záverečná cena nižšia ako maximálna cena, malo by to viesť k redukcii očakávaní týkajúcich sa maximálnej ceny v nasledujúcom období, kým v prípade, že záverečná cena je v porovnaní s minimálnou cenou vysoká, malo by to smerovať k zvýšeniu očakávaní ohľadom minimálnej ceny v nasledujúcom období. Na základe rovníc (8) a (9) je teda nepravdepodobné, že by semirozpätia mali charakter náhodnej prechádzky. Z rovnakej úvahy pre rozptyl vyplýva, že je nepravdepodobné, aby mal charakter náhodnej prechádzky.

3 ANALÝZA BURZOVÉHO INDEXU ATX

Na analýzu volatility boli použité denné hodnoty rakúskeho burzového indexu ATX (The Austrian Traded Index) v období 4.1.1999 – 28.12.2007 (t.j. 2221 hodnôt) v programovom systéme EViews 5.1 získané z internetovej stránky finance.yahoo.com. ATX je kapitalizačný vážený index najviac obchodovaných akcií na viedenskej burze (Telekom Austria, Mayr-Melnhof Karton, Boehler-Uddeholm, Voestalpine, EVN, Flughafen Wien, OMV AG, Oesterr Elektr Wirt, RHI AG, Wienerberger AG, Erste Bank, Andritz, A-Tec Industries, BWIN Interact Enter, Intercell, Oesterreich Post, Raiff International, UNIQA Versicherung, Wiener Staedt Vers, Zumtobel). Počiatočná hodnota indexu – 1000 bodov – sa viaže k 2. januáru 1991.

Predmetom analýzy boli (v logaritmickej tvare): denný výnos $\Delta Z_{av_t} = Z_{av_t} - Z_{av_{t-1}}$, výnos vypočítaný na základe maximálnych cien (ozn. max_výnos) $\Delta Max_t = Max_t - Max_{t-1}$, výnos vypočítaný na základe minimálnych cien (ozn. min_výnos) $\Delta Min_t = Min_t - Min_{t-1}$, horné semirozpätie $Max_t - Z_{av_t}$, dolné semirozpätie $Z_{av_t} - Min_t$ a denné rozpätie $Max_t - Min_t$. Základné štatistické charakteristiky (vrátane hodnôt Jarqueho - Berovej testovacej štatistiky) týchto časových radov sú v tabuľke 1. Hodnoty autokorelačných funkcií ACF pre počet oneskorení (ozn. Lag) 1, 2, 3, 4, 5, 12 a 200 spolu s hodnotami p-value sú v tabuľke 2.

Tabuľka 1

	<i>denný výnos</i>	<i>max_výnos</i>	<i>min_výnos</i>	<i>horné semirozpätie</i>	<i>dolné semirozpätie</i>	<i>denné rozpätie</i>
<i>priemer</i>	0,000623	0,000617	0,000625	0,005739	0,007113	0,012852
<i>medián</i>	0,000928	0,000426	0,001438	0,003707	0,005849	0,011126
<i>maximum</i>	0,046719	0,057922	0,040293	0,088405	0,049728	0,096924
<i>minimum</i>	-0,077676	-0,050174	-0,079025	0,000000	0,000000	0,001564
<i>št.odchýlka</i>	0,010124	0,008697	0,009577	0,006772	0,005839	0,007207
<i>šikmosť</i>	-0,633267	-0,274173	-1,010230	3,006117	1,649162	2,661297
<i>špicatosť</i>	6,884611	6,712749	8,239136	20,28961	7,632119	17,26152
<i>Jarque-Bera</i>	1544,224	1302,880	2916,599	31008,64	2992,379	21443,83
<i>probability</i>	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
<i>počet pozorovaní</i>	2220	2220	2220	2221	2221	2221

Tabuľka 2

Lag	denný výnos		max výnos		min výnos		horné semirozpätie		dolné semirozpätie		denné rozpätie	
	ACF	p-value	ACF	p-value	ACF	p-value	ACF	p-value	ACF	p-value	ACF	p-value
1	0,033	0,118	0,153	0,000	0,172	0,000	0,145	0,000	0,045	0,033	0,371	0,000
2	0,023	0,165	0,019	0,000	-0,030	0,000	0,187	0,000	0,040	0,017	0,311	0,000
3	0,005	0,302	0,044	0,000	0,020	0,000	0,138	0,000	0,043	0,006	0,303	0,000
4	0,012	0,409	0,014	0,000	0,020	0,000	0,153	0,000	0,038	0,004	0,286	0,000
5	0,030	0,305	0,037	0,000	0,035	0,000	0,171	0,000	0,054	0,001	0,282	0,000
12	-0,004	0,224	0,005	0,000	0,005	0,000	0,076	0,000	0,082	0,000	0,165	0,000
200	-0,021	0,719	0,005	0,017	-0,009	0,001	-0,003	0,000	0,003	0,000	0,010	0,000

Na základe výsledkov uvedených v tabuľke 1 možno tvrdiť, že priemerné výnosy časových radov ΔZ_{av_t} , ΔMax_t a ΔMin_t boli v sledovanom období približne rovnaké, a to 0,06%. Štandardná odchýlka bola v prípade časového radu ΔZ_{av_t} 1,01%, časového radu ΔMin_t 0,96% a najnižšiu hodnotu 0,87% dosahovala pre časový rad výnosov maximálnych cien ΔMax_t . Z hodnôt šikmosti a špicatosti, i na základe Jarqueho - Berovej testovacej štatistiky je zrejmé porušenie predpokladu normality rozdelenia. Hodnoty autokorelačnej funkcie ACF sú pre väčšinu oneskorení uvedených v tabuľke 2 pre časové rady ΔMax_t a ΔMin_t vyššie ako v prípade časového radu ΔZ_{av_t} .

Jednotlivé časové rady výnosov i (semi)rozpätí sme otestovali i na prítomnosť jednotkového koreňa s využitím ADF testu³. Všetky analyzované časové rady možno vzhľadom na skutočnosť, že hodnoty ADF štatistiky sa pohybovali od -45,59 do -11,94 (kritické hodnoty pre hladinu významnosti 1%, 5% a 10% sú -3,96, -3,41 a -3,13), považovať za stacionárne, t.j. hypotézu ohľadom existencie jednotkového koreňa možno v prípade všetkých časových radov zamietnuť. Za účelom dosiahnutia reziduí s vlastnosťami bieleho šumu⁴ je potrebné pre jednotlivé časové rady použiť nasledovné ARMA (Autoregressive Moving Average) modely:

$$\begin{aligned} \Delta Z_{av_t} &- \text{podmienka bieleho šumu je splnená}; & Max_t - Z_{av_t} &- \text{AR}(1-5,9) \\ \Delta Max_t &- \text{AR}(1); & Z_{av_t} - Min_t &- \text{ARMA}(1,1) \\ \Delta Min_t &- \text{ARMA}(1,1); & Max_t - Min_t &- \text{ARMA}(1,2). \end{aligned}$$

Za účelom overenia skreslenosti estimátora rozpätia vypočítajme štandardnú odchýlku σ_t pre jednotlivé dni (vychádzajúc zo vzťahu (1)), t.j.

$$\sigma_t = 0.627(Max_t - Min_t) \tag{12}$$

kde Max_t a Min_t predstavujú predstavujú logaritmy maximálnej a minimálnej ceny v časovom okamihu t . Priemerná hodnota odhadov denných štandardných odchýlok pre denné rozpätie

³ Rozšírený Dickeyho-Fullerov test existencie jednotkového koreňa – bližšie pozri Dickey a Fuller (1979).

⁴ Bližšie pozri napr. Franses a Dijk (2000).

$Max_t - Min_t$ je 0,806%. Štandardná odchýlka pre hodnoty denných výnosov uvedená v tabuľke 1 je 1,01%, z čoho možno vyvodit' záver o pomerne dobrej schopnosti estimátora cenového rozpätia pri odhade štandardnej odchýlky denných výnosov.

Vychádzajúc z vyššie uvedených vzťahov dostávame regresné modely očakávaných zmien v logaritmoch maximálnych i minimálnych cien, t.j. výnos vypočítaný na základe maximálnych cien a výnos vypočítaný na základe minimálnych cien. Ekonometrická špecifikácia týchto regresných modelov po zohľadnení špecifikácie náhodných porúch ε_t a ξ_t ako stacionárnych autoregresných procesov (za účelom zachytenia sériovej závislosti v reziduách modelu) dostávame

$$\Delta Max_t = a_0 - \alpha [Max_{t-1} - Zav_{t-1}] + \varepsilon_t \quad (13)$$

$$\varepsilon_t = -a_1 \varepsilon_{t-1} - a_2 \varepsilon_{t-2} - a_3 \varepsilon_{t-3} + v_t$$

$$\Delta Min_t = b_0 + \beta [Zav_{t-1} - Min_{t-1}] + \xi_t \quad (14)$$

$$\xi_t = -b_1 \xi_{t-1} - b_2 \xi_{t-2} - b_3 \xi_{t-3} + \zeta_t$$

pričom $a_0 = \mu + \alpha E[Max_t - Zav_t]$ a $b_0 = \mu + \beta E[Min_t - Zav_t]$. Parametre modelov (13) a (14) sme na základe výsledkov Breuschovho – Paganovho testu odhadli nelineárnou metódou SUR (seemingly unrelated regression). Výsledky odhadov parametrov modelov (13) a (14), hodnoty t-štatistík spolu s hodnotou koeficienta determinácie R^2 sú uvedené v tabuľke 3:

Tabuľka 3

<i>Parametre</i>	<i>Odhadnuté hodnoty</i>	<i>t-štatistika</i>
a_0	0,005674	26,78044
α	0,882894	46,39283
a_1	0,140103	7,102027
a_2	0,040779	2,175488
a_3	0,086435	4,660761
R^2	0,476717	
b_0	-0,006450	-19,15274
β	0,994864	40,68278
b_1	0,174976	8,781981
b_2	0,134160	7,044900
b_3	0,146228	7,855615
R^2	0,396936	

Odhady parametrov α a β sú 0,882894 a 0,994864, pričom zodpovedajúce hodnoty t-štatistík sú 46,39283 a 40,68278, t.j. časové rady výnosov maximálnych cien a výnosov minimálnych cien nemajú charakter náhodnej prechádzky. Čím vyššia je maximálna cena v predchádzajúcom období v porovnaní so záverečnou cenou v predchádzajúcom období, tým menší by mal byť očakávaný výnos vypočítaný na základe maximálnych cien. Analogicky, čím nižšia je predchádzajúca minimálna cena v porovnaní s predchádzajúcou záverečnou

cenou, tým vyšší by mal byť očakávaný výnos vypočítaný na základe minimálnych cien. Podstatnú otázku zohráva v tomto prípade otestovanie, či $\alpha = 1$ a $\beta = 1$. Na základe výsledkov týchto testov možno tvrdiť, že kým odhad parametra α je štatisticky významne odlišný od jednej, odhad parametra β sa však štatisticky významne od jednej nelíši⁵. Znamená to teda, že očakávanie týkajúce sa maximálnej ceny v nasledujúcom období dáva pozitívnu váhu na maximálnu cenu v tomto období, ako aj na záverečnú cenu a nepodmienené horné semirozpätie. Očakávaná minimálna cena je však daná jednoduchým súčtom záverečnej ceny a očakávaného dolného semirozpätia. Z uvedených zistení vyplýva určitá súvislosť vlastností rozptylu a rozpätia s tendenciou zotrvačnosti maximálnych cien.

Štatistická významnosť parametrov a_1, a_2, a_3 a b_1, b_2, b_3 indikuje oprávnenosť použitia autoregresných procesov na zachytenie sériovej závislosti v reziduách modelov (13) a (14). Výnosy vypočítané na základe maximálnych i minimálnych cien je možné vysvetliť prostredníctvom šokov počas predchádzajúcich troch dní. Tento dôkaz nenáhodného vývoja maximálnych a minimálnych cien naznačuje, že tendencia rozptylu vrátiť sa k priemernej hodnote má pôvod v procesoch generujúcich maximálne a minimálne ceny aktíva.

4 ZÁVER

V príspevku sme na denných hodnotách burzového indexu ATX poukázali na možnosť využitia cenového rozpätia pri analýze volatility. Na základe výsledkov možno prijať záver, že tendencia rozptylu vrátiť sa k priemernej hodnote má pôvod v procesoch generujúcich maximálne a minimálne ceny aktíva. Skúmanie vzťahov medzi využitím estimátora cenového rozpätia a modelmi volatility (G)ARCH pri analýze volatility finančných časových radov bude predmetom ďalších analýz.

Použitá literatúra

- [1] ARLT, J.- ARLTOVÁ, M.: *Finanční časové řady*. Praha, Grada 2003.
- [2] BOLLERSLEV, T.: *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*. Journal of Econometrics 31, 1986, č.3.
- [3] BOLLERSLEV, T. – CHOU, R. – KRONER, F.K.: *ARCH Modeling in Finance: A Selective Review of the Theory and Empirical Evidence with Suggestions for Future Research*. Journal of Econometrics 52, 1992.
- [4] DICKEY, D. – FULLER, W.A.: *Distribution of the Estimates for Autoregressive Time Series with a Unit Root*. Journal of the American Statistical Association 74, jún 1979.
- [5] ENDERS, W.: *Applied Econometric Time Series*. New York, John Wiley&Sons, Inc. 1995.
- [6] ENGLE, R.F.: *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. Econometrica 50, 1982, č.4.
- [7] ENGLE, R.F.: *Statistical Models for Financial Volatility*. Financial Analysts Journal, January – February 1993.
- [8] ENGLE, R.F. – GONZALEZ, G.: *Semiparametric ARCH*. Journal of Business and Economic Statistics 9, 1991.
- [9] FRANCES, P.H. – DIJK, D. van: *Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance*. Cambridge, Cambridge University Press 2000.

⁵ K rovnakým výsledkom prišli i Lin a Rozeff (1994) pri testovaní burzového indexu DJIA.

- [10] CHOCHOLATÁ, M.: *Modely a metódy pre analýzu výmenného kurzu*. Dizertačná práca, KOVE FHI EU, Bratislava 2005, 154 s.
- [11] CHOU, H.-Ch. – WANG, D.: *Forecasting Volatility on the U.K. Stock Market: A Test of the Conditional Autoregressive Range Model*. International Research Journal of Finance and Economics, Issue 10, 2007.
- [12] CHOU, R.Y.: *Forecasting Financial Volatilities with Extreme Values: The Conditional Autoregressive Range (CARR) Model*. Journal of Money, Credit, and Banking 37, 2005, č. 3.
- [13] LAMOUREUX, Ch. G.- LASTRAPES, W.D.: *Heteroskedasticity in Stock Return Data: Volume versus GARCH Effects*. Journal of Finance XLV, 1990, č. 1.
- [14] LIN, J.-Ch. – ROZEFF, M.S.: *Variance, Return, and High-Low Price Spreads*. Journal of Financial Research XVII, 1994, č.3.
- [15] NELSON, D.: *Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach*. Econometrica 59, 1991, s. 347-370.
- [16] PARKINSON, M.: *The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return*. Journal of Business 53, 1980, č.1.
- [17] finance.yahoo.com, www.bloomberg.com

Kontaktné údaje

Michaela Chocholatá, Ing. PhD.

Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava, email: chocholam@yahoo.com, tel.: 00421-2-67295 832.

MODELY DISKRÉTNÍ BINÁRNÍ VOLBY

DISCRETE BINARY CHOICE MODELS

Šárka Lejnarová

Abstrakt

V tomto článku se zabývám modely diskrétní binární volby: lineárním pravděpodobnostním modelem (LPM), logitovým modelem a probitovým modelem. Zkoumám je nejprve z teoretického hlediska, jaká je jejich podstata, jaká jsou jejich specifika a problémy.

V praktické části se zaměřuji na problematiku třídění odpadu. Aplikuji jednotlivé modely na získaná data a snažím se vysvětlit, na čem závisí volba jedince mezi „třídím odpad“ a nebo „netřídím odpad“. Na základě analýzy poté doporučuji, na koho a jakým způsobem zacílit osvětu.

Klíčová slova: Modely diskrétní binární volby, LPM, logit, probit, třídění odpadu.

Abstract

In this article I concern with discrete binary choice models namely linear probability model, logit model and probit model. First of all I see into theoretical viewpoint, what are principles, specificity and problems.

In practical part I survey on problems of waste sorting. I apply each model on obtained datas. I try to explain how the choice „Yes, I sort waste“ or „No, I don't sort waste“ is dependent upon different factors. Based on this analysis I determine target group and I recommend how to aim at education.

Key words: Discrete binary choice models, LPM, logit, probit, waste sorting.

1 ÚVOD

Modely diskrétní volby se zabývají situací, kdy vysvětlovaná proměnná je multinomická, to znamená nabývá pouze několika diskrétních hodnot. Modely diskrétní binární volby jsou zúžením modelů diskrétní volby na situaci, kdy vysvětlovaná proměnná je binární neboli alternativní popřípadě dichotomická z matematického hlediska je reprezentovaná nulajedničkovou proměnnou. Modely řeší problematiku, kdy se subjekt rozhoduje mezi dvěma často protikladnými alternativami, např. koupím nebo nekoupím výrobek dlouhodobé spotřeby, zůstávám nebo odcházím od telefonního operátora a podobně.

Jednotlivé modely diskrétní volby, zejména pak logitový model se původně používaly v biologii a medicíně. Poprvé pronikají do statistiky a epidemiologie v 50. letech 20. století. Dlouhou dobu byly modely diskrétní volby používané spíše jako statistická technika bez odpovídající interpretace. Ke změně došlo poté, co americký ekonom McFadden aplikoval modely na úlohu, kdy jedinec volí dopravní prostředek, jakým jezdí do práce (Ridgway-Tichelaar, 2000).

Ve svém výzkumu jsem se rozhodla aplikovat modely binární diskretní volby na problematiku třídění odpadů. Vysvětlovaná proměnná je odpověď na otázku: „Třídíte odpad?“. Respondent se tedy rozhoduje mezi dvěma alternativami: „Ano, třídím“ nebo „Ne, netřídím“. Aplikaci na oblast životního prostředí jsem si vybrala, protože se o ni aktivně zajímám. Domnívám se, že ochrana životního prostředí nabývá stále na významu. Během minulého století došlo k obrovskému nárůstu hospodářských činností, k vynálezu nových technologií a jejich zavedení do běžného života. To mělo určitě mnoho pozitiv pro lidský život, ale má to i své stinné stránky v podobě devastace životního prostředí. Lidé by si neměli myslet, že se jich tyto problémy netýkají. My všichni jsme obyvatelé jedné Planety, která je to nejcennější, co máme a je velmi důležité ji chránit. My jsme zodpovědní za své skutky, ne města, státy ani nadnárodní instituce.

Ve svém výzkumu jsem omezená skladbou vzorku odpovídajících respondentů. Sbírání probíhalo přes internet, proto jsou odpovídající aktivní internetoví uživatelé, to znamená, že vzorek není reprezentativní a výsledky se nedají zobecnit na celou populaci.

2 TEORETICKÝ ZÁKLAD

Dříve než se dostanu ke svému výzkumu, provedu čtenáře krátce v teorii modelů binární volby, pro jednodušší vysvětlení budu vše vysvětlovat na modelu obsahujícím pouze jednu vysvětlující proměnnou, pro ilustraci budu srovnávat s regresní analýzou.

Modely binární volby rozlišujeme tři: Lineární pravděpodobnostní model, logitový model, probitový model. Použití každého z nich má své výhody i své omezení. Obecně nejširší využití v praxi má model logitový.

Podstatný rozdíl mezi regresní analýzou a modely binární volby spočívá v tom, že vysvětlovaná proměnná v modelech binární volby je dichotomická. Vysvětlující proměnné mohou být spojité i diskretní exogenní proměnné ale i socioekonomické charakteristiky. Cíle modelů binární potažmo i diskretní volby jsou shodné jako cíle regresních modelů.

2.1 LPM

Nejjednodušší model binární volby je lineární pravděpodobnostní model. Model pracuje s pravděpodobnostmi, že subjekt (jedinec, domácnost, firma apod.) přijme či odmítne určité alternativní rozhodnutí. Vysvětlované proměnné jsou často socioekonomické, demografické nebo další charakteristiky.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + u, \quad (1)$$

kde Y je vysvětlovaná binární proměnná, X je vysvětlující proměnná, u je náhodná složka a regresní koeficienty β .

Podmíněnou střední hodnotu označujeme $E(Y|x)$ a můžeme ji popsat jako očekávanou hodnotu Y při dané hodnotě x neboli podmíněnou pravděpodobnost, že subjekt přijme danou alternativu v závislosti na uvažovaných charakteristikách. Pokud předpokládáme, že střední hodnota náhodné složky je nulová, platí

$$E(Y_i|X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i \quad (2)$$

Protože se původní lineární pravděpodobnostní model nijak neliší od lineárního regresního modelu, bylo by nasnadě použít pro odhad metodu nejmenších čtverců. Bohužel, při bližším zkoumání narazíme hned na několik úskalí (Gujarati, 1988).

Významným problémem je, že náhodná složka u_i **není normálně rozdělena**, nýbrž má dichotomické rozdělení. Tím, že Y_i nabývá pouze dvou hodnot, tak i u_i nabývá pouze dvou hodnot a to následovně. Pro model zapsaný v následujícím tvaru

$$u_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i. \quad (3)$$

Platí pro $Y_i=1$

$$u_i = 1 - \beta_0 - \beta_1 X_i, \quad (4)$$

a pro $Y_i=0$

$$u_i = 0 - \beta_0 - \beta_1 X_i. \quad (5)$$

Dichotomické rozdělení náhodné složky způsobuje problémy zejména při testování významnosti modelu. Problém se dá řešit tím, že zvolíme soubor, jehož velikost roste do nekonečna. To by znamenalo, že můžeme použít centrální limitní větu a aproximovat dichotomické rozdělení normálním rozdělením.

Hlavním problémem je **heteroskedasticita** rozptylu náhodné složky. Při předpokladu, že Y může nabývat pouze dvou hodnot a to 0 a 1, tak i u může nabývat pouze dvou hodnot a to (4) s pravděpodobností p_i a (5) s pravděpodobností $1 - p_i$.

Z toho vyplývá, že náhodná složka má rozdělení se střední hodnotou 0 a měnící se rozptyl je dán vzorcem $p_i(1 - p_i)$. Jak je tedy vidět, rozptyl náhodné složky u závisí na proměnné Y potažmo i X , což znamená, že není možno ho pokládat za homoskedastický. Při výskytu heteroskedasticity náhodné složky je nutno brát v úvahu, že metoda MNC neposkytuje efektivní odhady. Protože odhady nemají minimální rozptyl, nelze použít běžné testy statistické významnosti, ani intervalový odhad.

Ani tento problém nás nevede do bezvýchodné situace. Řešením může být odhadnutí modelu pomocí metody vážených nejmenších čtverců (MVNČ), resp. pomocí metody zobecněných nejmenších čtverců (MZNČ).

Při používání LPM se dále setkáváme s některými nedostatky, které se ale nevyskytují u nelineárních modelů binární volby. Prvním z nich je to, že podmíněná pravděpodobnost může nabývat **hodnot mimo interval $\langle 0,1 \rangle$** .

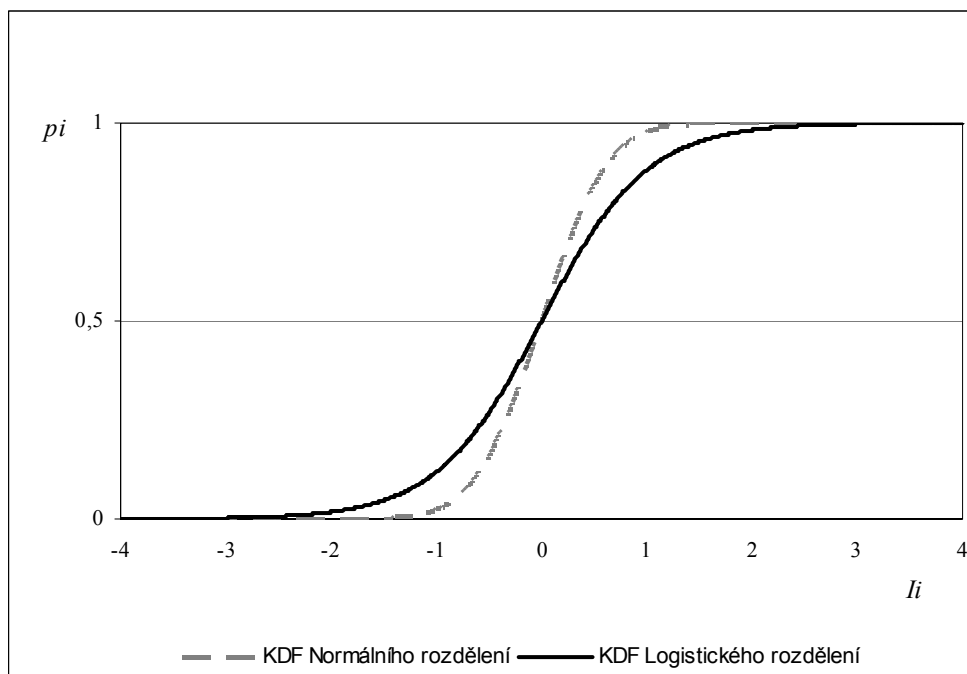
Pokud se tento problém naskytne, může se řešit tak, že krajní hodnoty větší než 1 se považují za 1 a naopak hodnoty menší než 0 se považují za 0.

$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{pro } \beta_0 + \beta_1 X_i < 0 \\ \beta_0 + \beta_1 X_i & \text{pro } 0 \leq \beta_0 + \beta_1 X_i \leq 1 \\ 1 & \text{pro } \beta_0 + \beta_1 X_i > 1 \end{cases}$$

Další problém nastává při **interpretaci modelu** a spočívá v jeho **linearitě**. Při stejných změnách vysvětlujících proměnných ve vektoru x_i , totiž dochází k jiným změnám pravděpodobností v závislosti na tom, jaká byla výchozí úroveň vysvětlující proměnné. Tomu neodpovídá model LPM, ale odpovídají tomu nelineární modely, kterými se budu zabývat v následujících řádcích. V grafickém vyjádření tomu odpovídá symetrická S-křivka na rozdíl od přímky.

2.2 Logitový, probitový model

Logitový a probitový model jsou nelineárními modely binární volby. Pro případ binární proměnné můžeme použít některou známou kumulativní distribuční funkci (KDF). Nejčastěji používaná je funkce logistického rozdělení (logitový model) nebo funkce normovaného normálního rozdělení (probitový model).



Obrázek 1 - KDF normovaného normálního a logistického rozdělení

Logistickou funkci vybíráme proto, že je to flexibilní a jednoduchá funkce a můžeme ji smysluplně interpretovat.

Pro zjednodušení zápisu označíme $p_i = E(Y|x)$ – vyjadřující podmíněný průměr Y pro dané x , když je použito logistické rozdělení. Pravděpodobnost p_i definujeme jako podmíněnou pravděpodobnost volby i -tého subjektu. Specifický tvar logitového modelu, který používáme je dán výrazem (Hosmer, Lemeshow, 2000)

$$p_i = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}} \quad (6)$$

Logitová transformace je definována následovně

$$g(x) = \ln \left[\frac{p_i}{1 - p_i} \right] = \beta_0 + \beta_1 x \quad (7)$$

Výraz představuje logaritmus podílu možných pravděpodobností obou alternativ. Důležitost této transformace spočívá v tom, že logit $g(x)$ je lineární v parametrech, může být spojité a může nabývat hodnot od minus nekonečna do nekonečna. Funkce logitu je inverzní k logistické křivce. Logistická funkce hustoty pravděpodobnosti je hladká křivka souměrná kolem nuly.

Z důvodu heteroskedasticity se pro odhad logitového modelu používá metoda maximální věrohodnosti (MMV). Princip MMV spočívá v nejlepší odhadu parametrů β , které

maximalizují výraz $l(\beta)$. Matematicky je výhodnější pracovat s logaritmem věrohodnosti (např. Hosmer, Lemeshow, 2000)

$$L(\beta) = \ln[l(\beta)] = \sum_{i=1}^n [y_i \ln(p_i) + (1 - y_i) \ln(1 - p_i)]. \quad (8)$$

Normální rovnice (*podmínky prvního řádu*)

$$\begin{aligned} \sum [y_i - p_i] &= 0 \\ \sum x_i [y_i - p_i] &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

V lineární regresi vychází normální rovnice lineární v parametrech β , ale v logistické regresi platí, že výše uvedené věrohodnostní rovnice jsou nelineární v parametrech β_0, β_1 , to vyžaduje numerické metody pro jejich řešení. V současnosti existují statistické softwary, které tyto metody nabízejí standardně.

Při vysvětlování **probitového modelu** využijeme teorie užitku a racionální volby vyvinutou McFaddenem (např. Gujarati, 1988). Definujeme index užitku I_i jako spojitou neměřitelnou proměnnou danou vztahem

$$I_i = \beta_0 + \beta_1 X_i. \quad (10)$$

Uvažujeme příklad, kdy zkoumáme, zda domácnost vlastní např. chatu v závislosti na výši příjmu domácnosti. Pokud je $Y = 1$, znamená to, že domácnost vlastní chatu. Pokud je $Y = 0$, domácnost chatu nevlastní. Pro každou domácnost existuje určitá prahová úroveň indexu užitku značící se jako I_i^* , ta nám udává, že pokud I_i překročí úroveň I_i^* , domácnost bude vlastnit chatu, což znamená že $Y = 1$. Prahová úroveň I_i^* , stejně jak samotný index užitku I_i , není pozorovatelná, ale předpokládáme, že je standardně normálně rozdělená. Z těchto předpokladů můžeme vyvodit vzorec pro určení pravděpodobnosti, kdy skutečný index užitku je větší než hraniční úroveň užitku (Gujarati, 1988)

$$p_i = P(Y = 1) = P(I_i^* \leq I_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{I_i} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta_0 + \beta_1 X_i} e^{-t^2/2} dt, \quad (11)$$

kde t je standardně rozdělená normální náhodná veličina $t \sim N(0, 1)$.

Takto definovaná pravděpodobnost nám určuje pravděpodobnost, že daný jev nastane, ve výše uvedeném příkladu, že domácnost vlastní chatu.

Výběrový probit můžeme vyjádřit následujícím vzorcem (Hušek, Pelikán, 2003)

$$I_i = F^{-1}(P_i) = F^{-1}(p_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i, \quad (12)$$

kde F^{-1} je inverzní funkce normální distribuční funkce.

Pro odhad probitového modelu také používáme MMV. Logaritmičká věrohodnostní funkce je dána následujícím vzorcem (Hušek, Pelikán, 2003)

$$\ln[L(\beta; y)] = \sum_{i=1}^n [y_i \ln(1 - F_{NOR}(-I_i)) + (1 - y_i) \ln(F_{NOR}(-I_i))]. \quad (13)$$

Podmínky prvního řádu pro maximalizaci výrazu jsou definovány následovně

$$\frac{\partial \ln[L(\beta; y)]}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n [y_i - p_i(\beta)] \phi(I_i) x_i = 0, \quad (14)$$

kde

$$p_i(\beta) = F_{NOR}(I_i),$$
$$\phi(I_i) = \frac{f_{NOR}(I_i)}{F_{NOR}(I_i)[1 - F_{NOR}(I_i)]}. \quad (15)$$

Protože soustava (2.15) je nelineární vzhledem k parametru β , je nutno pro řešení opět použít některou z metod numerické optimalizace (např. Hušek 1998). Odhad modelů binární volby pomocí MMV nabízejí standardně některé softwary (SPSS, SAS, GiveWin).

Výhodou použití logitového a probitového modelu je interpretace KDF. Při stejných změnách vysvětlujících proměnných ve vektoru x_i vykazují KDF tím menší přírůstky pravděpodobnosti p_i , čím více se jejich hodnoty blíží k mezím jednotkového intervalu $(0,1)$. Největší vliv těchto změn nastává v bodě, kdy je index užitku nulový a pravděpodobnost je rovná 0,5.

3 EMPIRICKÝ VÝZKUM

Pro aplikaci modelů binární volby jsem si vybrala problematiku třídění odpadu. Zkoumám v ní volbu jednotlivce, jestli třídí nebo netřídí odpad v závislosti na různých socioekonomických faktorech (věk, aktivita, dobročinnost, kraj, příjem, profese, pohlaví, vzdělání). Použila jsem všechny tři modely binární volby, uvádím zde podrobněji výsledky logitového modelu a porovnání všech tří modelů. Ankety se účastnilo 586 respondentů.

Závislou proměnnou je **třídění odpadu**, což je binární proměnná nabývající hodnot 0 v případě, že respondent netřídí odpad a 1 v případě, že subjekt třídí odpad. V našem zkoumaném vzorku třídí odpad 84% respondentů. To můžeme porovnat s informacemi uváděnými společnostmi EKO-KOM, které uvádí, že podle posledního celorepublikového výzkumu třídí 67% občanů. Domnívám se, že tento rozdíl je dán tím, že výzkum probíhal pouze přes internet a přihlásili se převážně lidé, kteří třídí odpad.

K odhadu logitového modelu můžeme použít také většinu statistických softwarů, které nabízejí logistickou regresi a metodu maximální věrohodnosti. Je také možno použít metodu postupné regrese, která nám umožňuje vybrat podstatné proměnné do modelu. Z modelu postupně vyřazují proměnné *SEX* (p-hodnota 0,979), *AKT* (0,0706), *VEK* (0,605), *PŘIJ* (0,382), *PROFES* (0,149), *KRAJ* (0,190) a *OBYV* (0,154).

Jako jediné dvě proměnné, které v modelu zůstanou jsou *DOBR* a *VZDEL*. Proměnná dobročinnost představuje odpověď na otázku: „Přispíváte na dobročinné akce?“ a může nabývat tři hodnot: „Ne, nepřispívám“, „Ano, přispívám příležitostně“, „Ano, přispívám pravidelně“. Proměnná vzdělání představuje nejvyšší dosažené vzdělání respondenta, je rozlišeno i že respondent studuje. Obě dvě proměnné mají *P*-hodnotu menší než 0,05, což znamená, že jsou v modelu významné na 5% hladině významnosti.

V následující tabulce vidíme, že *P*-hodnota je menší než 0,01, což nám svědčí o tom, že mezi vysvětlovanými a vysvětlující proměnnou existuje závislost na jednoprocenní hladině významnosti.

Tabulka č. 1 - Analýza rozptylu

Zdroj	Odchylka	Stupně volnosti	P-hodnota
Model	23,8949	9	0,0045
Residual	492,543	577	0,9953
Celkem	516,438	586	

Test věrohodnostního poměru určuje významnost jednotlivých proměnných v modelu a pracuje na principu porovnání modelu s vysvětlující proměnou a bez ní. Při použití metody MMV se místo F -testu používá chí-kvadrát statistika. Pro obě dvě proměnné *DOBR* a *VZDEL* je P -hodnota menší než 0,05, což značí významnost proměnných v modelu na 5% hladině významnosti.

Tabulka č. 2 - Test věrohodnostním poměrem

Vysvětlující proměnná	Chí-kvadrát	Stupně volnosti	P-hodnota
<i>DOBR</i>	6,8212	2	0,0330
<i>VZDEL</i>	16,5842	7	0,0203

Pro určení shody modelu s daty můžeme využít některou modifikaci koeficientu determinace. Pro tento model vychází $R^2 = 0,033635$.

Tabulka č. 3 - Odhadovaný logitový model metodou MMV

Vysvětlující proměnná	Hodnota parametru	Standardní chyba	Poměr šancí
<i>CONSTANT</i>	2,5452	-0,73929	
<i>DOBR=1</i> <i>Nepřispívá</i>	-1,11545	10,9741	0,327768
<i>DOBR=2</i> <i>Přispívá</i>			
<i>DOBR=2</i> <i>příležitostně</i>	-0,49508	0,163054	0,60952
<i>VZDEL=2</i> <i>ZŠ</i>	9,69921	10,9736	16304,7
<i>VZDEL=3</i> <i>SŠ bez maturity</i>	-0,4075	0,303171	0,665311
<i>VZDEL=4</i> <i>Student SŠ</i>	-0,9215	10,92	0,397923
<i>VZDEL=5</i> <i>SŠ s maturitou</i>	-0,20169	1,60294	0,817351
<i>VZDEL=6</i> <i>Student VOŠ</i>	-13,6162	1,13362	1,22059E-06
<i>VZDEL=7</i> <i>VOŠ</i>	0,681224	-0,09847	1,9763
<i>VZDEL=8</i> <i>Student VŠ</i>	-0,74024	10,9707	0,477

Při odhadování modelu došlo k vytvoření pomocných nula jednotkových proměnných, protože vysvětlující proměnné jsou diskrétní. Pro každou vysvětlující proměnnou je stanovena referenční skupina. Pro proměnnou dobročinnost byla referenční skupina třetí *DOBR=3*, tzn. respondent pravidelně přispívá na dobročinné akce. Pro proměnnou vzdělání to byla skupina *VZDEL=9*, tzn. respondent má ukončené vysokoškolské vzdělání. V modelu dále není zahrnuta proměnná *VZDEL=1*, protože žádný z odpovídajících nebyl studentem základní školy.

Záporná hodnota parametru snižuje pravděpodobnost třídění odpadu oproti referenční skupině, kladná hodnota ji naopak zvyšuje. Podíváme-li se na hodnoty parametru proměnné dobročinnosti, vidíme, že jsou obě dvě záporné. To znamená, že je tu nižší pravděpodobnost, že jedinec třídí odpad, pokud nepřispívá nebo přispívá pouze příležitostně na dobročinné účely oproti jedinci, který přispívá pravidelně. U proměnné vzdělání je referenční skupinou ukončené vysokoškolské vzdělání. Hodnota parametru je kladná pro skupinu s ukončeným základním nebo vyšším odborným vzděláním. Všechny ostatní parametry jsou záporné, nejnižší hodnoty dosahují studenti na všech úrovních studia. To znamená, že oproti osobám s ukončeným vysokoškolským vzděláním, je pravděpodobnost pro studenty, že třídí odpad, mnohem nižší.

Další informace, které nám model udává, jsou o poměru šancí (*odds ratio*). Šance zvolené alternativy nám určuje kolikrát je pravděpodobnější, že subjekt třídí odpad než to, že subjekt odpad netřídí. Šance je dána podílem pravděpodobností $p_i/(1-p_i)$, kde p_i je pravděpodobnost, že subjekt třídí odpad.

Poměr šancí poté udává, kolikrát je větší šance, že hodnota pravděpodobnosti bude 1 než, že bude 0. Tuto hodnotu nabízí standardně většina statistických programů, ale je možno ji jednoduše získat odlogaritmováním hodnoty parametru pro danou proměnnou. Např. pro proměnnou $VZDEL=7$ je hodnota parametru rovna 0,681224, pro poměr šancí tedy platí $e^{0,681224} = 1,9763$. Opět se jedná o hodnotu porovnanou s referenční skupinou, takže pro jedince s ukončeným vyšším odborným vzděláním je šance, že třídí odpad téměř 2krát vyšší než pro jedince s ukončeným vysokoškolským vzděláním.

Tady bych chtěla podotknout, že údaje mohou být zkreslené kvůli nedostatečnému množství respondentů ve skupině se vzděláním ZŠ a VOŠ.

3.1 Porovnání modelů a shrnutí výsledků

Ve všech modelech se ukázaly jako nejvýznamnější proměnné dobročinnost a vzdělání. Domnívám se, že dobročinnost je významný faktor, protože člověk, který se snaží pomáhat ostatním tím, že přispívá na dobročinnost, má sociální zodpovědnost nejen vůči ostatním lidem, ale také k přírodě. Tudíž častěji třídí odpad než člověk, který na dobročinné akce nepřispívá. Také si ale myslím, že tu může hrát roli i to, že respondenti neodpovídají zcela pravdivě a snaží se dělat „lepší“ v obou případech jak v přispívání na dobročinné akce tak v třídění odpadu. Co se týče druhého faktoru, ukázalo se, že jsou to zejména studenti, u kterých je pravděpodobnost třídění odpadu nejnižší. Podle mého názoru je to zapříčiněno tím, že žijí bezstarostný život a o nic se nestarají. Dobré znamení ale je, že lidé s ukončeným vzděláním už častěji třídí odpad, takže tu existuje naděje, že studenti z bezstarostnosti jednoduše vyrostou a stanou se z nich lidé zodpovědní k přírodě a společnosti.

Podle analýzy rozptylu byly všechny modely významné alespoň na pětiprocentní hladině významnosti. Při použití pseudostatistik R^2 modely, podle předpokladu, nevykazovaly významnou shodu s daty.

V následujících tabulkách udávám, jak podle mého výzkumu vypadá člověk, který třídí a netřídí odpad. Ve sloupcích jsou uvedené odhadované pravděpodobnosti podle jednotlivých modelů.

Když se podíváme na tabulku, ve které jsou nejnižší odhadované pravděpodobnosti, vidíme, že nejvíce se jednotlivé modely liší pro první řádek reprezentující studenta VOŠ, který pravidelně přispívá na dobročinné akce. Je to dáno malým zastoupením respondentů ve skupině studentů VOŠ, konkrétně to byl pouze jeden student VOŠ v celém výzkumu a ten

uvedl, že odpad netřídí. Za nejrealističtější pravděpodobnost pro první položku bych považovala právě pravděpodobnost uváděnou probitovým modelem.

Tabulka č. 4 - Srovnání modelů pro "netřídíče" odpadu

\hat{Y}_{LPM}	\hat{Y}_{logit}	\hat{Y}_{probit}	Dobročinnost	Vzdělání
-4,72148E-13	9,4825E-06	0,671935	Přispívá příležitostně	Student VOŠ
0,6465	0,624398	0,732396	Nepřispívá	Student SŠ
0,694564	0,665859	0,675764	Nepřispívá	Student VŠ

V druhé tabulce uvádím, jak vypadají lidé, kteří třídí odpad s pravděpodobností vyšší než 90%. Když se podíváme do sloupce dobročinnost, jsou to lidé, kteří přispívají pravidelně nebo příležitostně na dobročinné akce. Při zkoumání jednotlivých pravděpodobností narazíme znovu na problém u modelu LPM, kde pravděpodobnosti překročili hodnotu 1.

Tabulka č. 5 - Srovnání modelů pro "třídíče" odpadu

\hat{Y}_{LPM}	\hat{Y}_{logit}	\hat{Y}_{probit}	Dobročinnost	Vzdělání
1,07116	0,999995	0,972082	Přispívá pravidelně	Základní
1,02301	0,999992	0,944596	Přispívá příležitostně	Základní
1,01891	0,961817	0,95978	Přispívá pravidelně	Vyšší odborné
0,975904	0,938851	0,923697	Přispívá příležitostně	Vyšší odborné
0,933312	0,927251	0,943398	Přispívá pravidelně	Vysokoškolské
0,911049	0,912417	0,922162	Přispívá pravidelně	Střední s maturitou

Po provedení výše uvedené analýzy bych doporučila pro tuto studii nelineární modely binární diskretní volby, protože pravděpodobnosti jsou v intervalu $<0,1>$. Je tu sice větší výpočetní složitost než u LPM, ale tento problém mizí s existencí různých softwarů, které standardně používají metodu MMV (SPSS, SAS, GiveWin).

Na základě těchto výsledků bych doporučila zaměřit „osvětu třídění odpadu“ na studenty na jakékoli úrovni. To znamená soustředit se na základní školy, jak vím z internetových stránek, tato kampaň už probíhá a navíc bych doporučila i různé akce v podobě dětských dnů. Doporučila bych dále se zaměřit i na studenty středních a vysokých škol, vhodné pro to mohou být přímo školy, koleje popř. studentské festivaly jako je Majáles.

Z výsledků můžeme vidět, že odpad třídí spíše lidé, kteří přispívají pravidelně nebo nepravidelně na dobročinné akce. Jsou to lidé, kteří cítí sociální zodpovědnost. Doporučila bych tedy se zaměřit na dobročinné a charitativní akce, např. Pomozte dětem, Nadace naše dítě, Greenpeace apod. To by mohlo inspirovat i lidi, kteří přispívají na dobročinné akce, ale doposud netřídí odpad.

4 ZÁVĚR

Ve své práci jsem ukázala praktické využití modelů binární volby pro oblast marketingového výzkumu a poukázala jsem na některé problémy, které je nutno v praktických úlohách řešit. Je to například heteroskedasticita náhodné složky, použití modelů vyžaduje patřičné softwarové zázemí a nedostatečný vzorek respondentů. Domnívám se, že nejenom v tomto oboru mají modely diskretní binární volby velký potenciál.

Použitá literatura

1. EKO-KOM: Výsledky systému EKO-KOM ve využití a recyklaci obalových odpadů za rok 2005 (tisková zpráva). [online].12.6.2006 [cit. 24.09 2007]. Dostupný na www: http://www.ekokom.cz/assets/V_sledky_syst_mu_EKO-KOM_2005_12.6.2006_.pdf
2. Fíglová Z., Analýza modelov diskretnej volby a ich aplikacia, Disertační práce, VŠE, Praha, 2006
3. Gujarati N.D.: Basic econometrics, 2.vyd. USA: R.R. Donnelley & Sons Company 1988. 705s. ISBN 0-07-025188-6
4. Heřábek P.: Regrese I. část, 1.vyd. Praha: VŠE 1998. 238Ss. ISBN 80-7079-909-9.
5. Hosmer, D.W., Lemeshow, S.: Applied logistic regression, 2.vyd. USA: John Wiley & Sons, Inc 2000. 375s. ISBN 0-471-35632-8.
6. Hušek, R.: Ekonometrická analýza, 1.vyd. Praha: Ekopress 1999. 303s. ISBN 80-86119-19-X.
7. Hušek, R., Pelikán, J.: Aplikovaná ekonometrie (Teorie a praxe), 1.vyd. Praha: Professional Publishing 2003. 263s. ISBN 80-86419-29-0.
8. Komise Evropských společenství: Podpora trvale udržitelného využívání zdrojů: Tematická strategie pro předcházení vzniku odpadů a jejich recyklaci. [online]. Brusel 21.12.2005 [cit. 24.02. 2007]. Dostupný na www: http://eurlex.europa.eu/LexUriServ/site/cs/com/2005/com2005_0666cs01.pdf
9. Novela směrnice o odpadech [online]. 08.02.2007[cit. 24.09 2007]. Dostupný na www: http://www.europarl.europa.eu/news/expert/briefing_page/2591-043-02-07-20070130BRI02590-12-02-2007-2007/default_p001c007_cs.htm
10. Ridgway-Tichelaar, M.: Taking BART to Stockholm [online]. [cit. 16.09. 2007]. Dostupný na www: http://www.alumni.berkeley.edu/Alumni/Cal_Monthly/December_2000/Taking_BART_to_Stockholm.asp

Kontaktní údaje

Ing. Šárka Lejnarová

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Nám. W. Churchilla 4, Praha 3, 130 67

Tel: 420 224 095 445

email: sarka.lejnarova@vse.cz

AUTOMATIZÁCIA VIACFAKTOROVÝCH ÚLOH VÝBERU PORTFÓLIA.

AUTOMATIZATION OF MULTIFACTOR MODELS OF PORTFOLIO SELECTION

Zdenka Milánová

Abstrakt

Proces generovania efektívnej hranice je pomerne náročný problém. Na zjednodušenie tohto procesu je v tomto dokumente predstavená nová aplikácia v prostredí MS Excel, ktorá umožňuje nájsť efektívnu hranicu v priestore priemer – rozptyl a v priestore priemer – CVaR. Tento dokument obsahuje dva viacfaktorové modely výberu portfólia, pričom ako ďalší faktor je použitý faktor recesie. Cieľom prvého modelu je minimalizovať riziko, ktoré je merané pomocou rozptylu s ohľadom na ohraničenia týkajúce sa očakávaného výnosu portfólia a súčtu váh aktív v portfóliu. Druhý model je založený na stratégii minimalizácie rizika, ktoré je merané pomocou podmienenej hodnoty v riziku (*CVaR*). Tieto dva modely sú použité na údaje indexu Dow Jones Industrial.

Kľúčové slová: *riziko, podmienená hodnota v riziku, viacfaktorový model*

Abstract

Generation of effective frontier is relatively difficult process. In this paper is introduced new application in space of MS Excel that simplifies this process and generates effective frontier in mean – variance space and mean – CVaR space. There are two multifactor portfolio selection models used in this paper. Factor of the recession is used as another factor. The goal of the first one is to minimize risk measured by the variance, with respect to constraints on the expected return of the portfolio and sum of asset weights in the portfolio. The second one is based on the strategy of the minimization of the risk measured by *CVaR* of the portfolio. These two models are applied to data of Dow Jones Industrial.

Keywords: *Risk, Conditional Value at Risk, Multifactor model*

1 MULTIFACTOR MODELS OF PORTFOLIO SELECTION

This work contains two multifactor portfolio selection models. The first one was proposed by Fama (1996). The goal is to minimize risk measured by variance with respect to given level of the expected return and beta, which takes into account a risk of the recession. The second one is based on portfolio selection model of Rockafellar and Uryasev (2000, 2002), where Conditional Value-at-Risk (*CVaR*) is used as a measure of the risk. In this work a factor of the recession is used as a next constraint.

The goal of the first multifactor model is to minimize risk measured by variance, with respect to constraints on expected return of the portfolio and sum of asset weights in the portfolio. Risk of the recession is used as an additional risk factor. Following multifactor model of the portfolio selection is proposed in Mlynarovič (2001):

$$\min \frac{1}{2} \cdot \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{w} \quad (1)$$

s. t.

$$\mathbf{w}^T \cdot E(\mathbf{R}) = E(R_p), \quad (2)$$

$$\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{e} = 1, \quad (3)$$

$$\mathbf{w}^T \cdot \beta = \beta_p, \quad (4)$$

where $\mathbf{w}^T = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ is a vector of the asset weights in the portfolio, \mathbf{C} is the covariance matrix of the asset returns, $E(\mathbf{R}) = (E(R_1), E(R_2), \dots, E(R_n))$ is a vector of expected returns of individual assets, $E(R_p)$ is given return of the portfolio and \mathbf{e} is a vector of ones. In the fourth constraint β represents additional risk factor and β_p is a given level of the additional risk factor. Portfolio consists of i assets, where $i = 1, 2, \dots, n$.

By solving this problem for different levels of expected return, multifactor efficient frontier is drawn in the mean – variance (standard deviation) space. Constraint of the additional risk factor is enclosed to the model of Konno, Waki, Yuuku (2002). The strategy is based on the minimization of the risk measured by *CVaR* of the portfolio:

$$\min \omega + \sum_{t=1}^T \frac{p_t z_t}{(1-\alpha)} \quad (5)$$

s. t.

$$z_t \geq -\sum_{i=1}^n R_{it} w_i + q_t - \omega, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (6)$$

$$z_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad \mathbf{w} \in W, \quad (7)$$

$$\mathbf{w}^T \cdot \beta = \beta_p \quad (8)$$

$$\mathbf{w}^T \cdot E(\mathbf{R}) = E(R_p), \quad (9)$$

$$\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{e} = 1, \quad (10)$$

where ω is a dummy variable that approximates *VaR* in the optimal solution, p_t is a probability that asset achieves expected return, α is a *CVaR* confidence level (0,95 or 0,99), z_t is a dummy variable connected with *CVaR* constraint under scenario t , q_t is the return of the portfolio under scenario t .

The objective of this optimization program is to construct multifactor efficient frontier by changing value of the expected return of the portfolio.

2 AUTOMATIZATION OF MULTIFACTOR MODELS

Generation of effective frontier is relatively difficult process. In this paper is introduced a new application in the space of MS Excel that simplifies this process and generates effective frontier in $M - V$ space and $M - CVaR$ space. This application allows take into consideration another constraints. User can use short sales, constraints for weights; take into consideration factor of recession. In the case of $M - V$ analysis user can decide to use mean value or Black – Litterman model for the computation of expected value. Entry dialog box for mean –variance analysis is shown in Figure 1.

Figure 1: Input dialog box for mean - variance analysis

The image shows a software dialog box titled "Úloha výberu portfólia" (Portfolio Selection Task). It has two tabs: "M-V analýza" (selected) and "M-CVaR analýza". The dialog is divided into several sections:

- Zadajte maticu výnosov jednotlivých aktív**: A text input field for the return matrix, with "Ok" and "Storno" buttons to its right.
- Krátke predaje**: A checkbox.
- Použiť ohraničenie váh**: A checkbox.
- Váhy**: A section containing two input fields: "Horné ohraničenie váh" (Upper weight limit) and "Dolné ohraničenie váh" (Lower weight limit).
- Faktor recesie**: A checkbox.
- Faktor recesie**: A section containing an input field "Zadajte vektor výnosov indexu" (Enter index return vector).
- Výpočet výnosu**: A section titled "Zvoľte spôsob výpočtu očakávaného výnosu aktív" (Choose the method for calculating the expected return of assets) with two radio buttons: "Stredná hodnota" (Mean) and "Black - Littermanov model".
- Trhové portfólio**: A section containing three input fields: "Bezriziková miera" (Risk-free rate), "Dodatočný výnos portfólia" (Additional portfolio return), and "Zadajte trhovú kapitalizáciu (ak je známa)" (Enter market capitalization (if known)).
- Použiť Premium Solver Platform for Excel**: A checkbox at the bottom with the note "(ak je nainštalovaný)" (if installed).

In the case of $M - CVaR$ analysis it is needed to enter historical data, scenarios, confidence level and user can take into consideration short sales, constraints for weights, and factor of recession.

Figure 2: Input dialog box for mean - CVaR analysis.

The dialog box titled "Úloha výberu portfólia" (Portfolio Selection Task) has a blue header bar with a close button. It contains two tabs: "M-V analýza" and "M-CVaR analýza", with the latter selected. The main area is divided into several sections:

- Zadajte maticu výnosov jednotlivých aktív**: A text input field with a dropdown arrow.
- Scenáre**: A section containing three input fields: "Matica scenárov výnosov aktív", "Vektor scenárov výnosov indexu", and "Vektor pravdepodobností", each with a dropdown arrow.
- Spolahlivosť**: A section with a label "Úroveň spoľahlivosti" and an input field.
- Options**: Three checkboxes: "Krátke predaje", "Použiť ohraničenie váh", and "Faktor recesie".
- Váhy**: A section with two input fields: "Horné ohraničenie váh" and "Dolné ohraničenie váh", each with a dropdown arrow.
- Faktor recesie**: A section with a label "Zadajte vektor výnosov indexu" and an input field with a dropdown arrow.
- Footer**: A checkbox "Použiť Premium Solver Platform for Excel (ak je nainštalovaný)".

Buttons for "OK" and "Storno" are located on the right side of the dialog.

When data are inserted, then application offers another dialog box. This dialog box offers to user interval with initial value and final value of the expected return and rise of the expected value (Figure 3). Initial value of expected value corresponds with expected value of a globally minimum variance portfolio and final value corresponds with expected value of a globally maximum variance portfolio. For every expected value is found portfolio with minimum variance for given expected return and weights of assets in this portfolio. Finally effective frontier is drawn for this interval.

Figure 3: Dialog box for initial value, final value and rise of expected value.

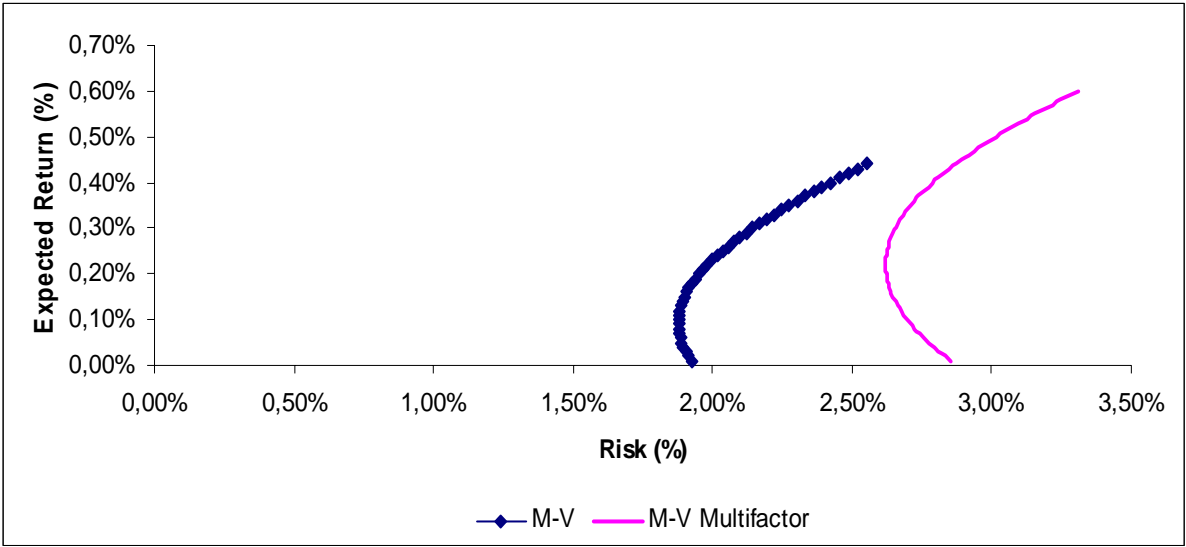
The dialog box titled "Výpočet výnosu" (Return Calculation) has a blue header bar with a close button. It contains the following elements:

- Očakávaný výnos**: A label above the main input area.
- Zadajte interval zmien očakávaného výnosu portfólia**: A label for the interval input.
- Od:** An input field containing the value "0,01362".
- Do:** An input field containing the value "0,01793".
- Krok:** An empty input field.
- Buttons**: "Ok" and "Storno" buttons on the right side.

Previous two models are applied to data of Dow Jones Industrial Average (Dow 30, Dow Industrials, DJIA, Dow 30). Dow Jones Industrial is the oldest running U.S. market index, consisting of 30 largest and most widely held public companies in the United States. In the analysis are used weekly data about performance of the index and its components from 14.1.2000 to 23.3.2007.

In order to find portfolios with minimum variance it is needed to compute covariance matrix and expected return of all assets in Dow 30. Then, it is needed to find minimum variance (standard deviation) frontier. Previous application with Solver Premium of the MS Excel is used for this purpose. Results of the mean – variance (standard deviation) analysis are shown in Figure 4. Then model (1)-(4) is used for generating multifactor efficient frontier. Factor of the recession is used as another factor and it is marked as beta. Beta explains expected return in time of the recession. Figure 1 shows that taking recession factor into consideration causes moving of the minimum variance (standard deviation) frontier to the right. It leads to a change of the investment opportunities, which allows minimum risk for given level of the expected return. Global minimum variance portfolio is a portfolio that has the lowest possible variance (standard deviation) for any expected return. Global Minimum Variance of the portfolios that are generated by *M-V* analysis is 1,877%. Global Minimum Variance of the portfolios that are generated by multifactor *M-V* analysis is 2,621%.

Figure 4: Comparing of the portfolios that minimize variance subject to constraints on expected return and sum of weights of the portfolio with portfolios that minimize variance subject to constraints on expected return, sum of weights of the portfolio and the recession factor



In the next step is used *M-CVaR* model [4] to find efficient frontier. *VaR* from the *CVaR* constraint is used as a measure of the risk. For scenario generation, 376 historical returns are used. Figure 5 shows minimum variance frontier of the portfolio with the *CVaR* constraint. This frontier is compared with multifactor minimum *VaR* frontier that is generated by the multifactor *M - CVaR* model (5)-(10).

Setting risk $\omega = 2\%$ and $\alpha = 99\%$ implies that the average loss in 1% of worst cases must not exceed 2% of the initial value of the portfolio. Next factor in the model causes moving of

the minimum variance (standard deviation) to the right and investor can achieve higher returns connected with higher risk, of course.

Figure 5: Comparing of the portfolios that minimize *CVaR (99%)* subject to constraints on expected return, sum of weights of the portfolio and scenarios with portfolios that minimize *CVaR (99%)* subject to constraints on expected return, sum of weights of the portfolio, scenarios and the recession factor.

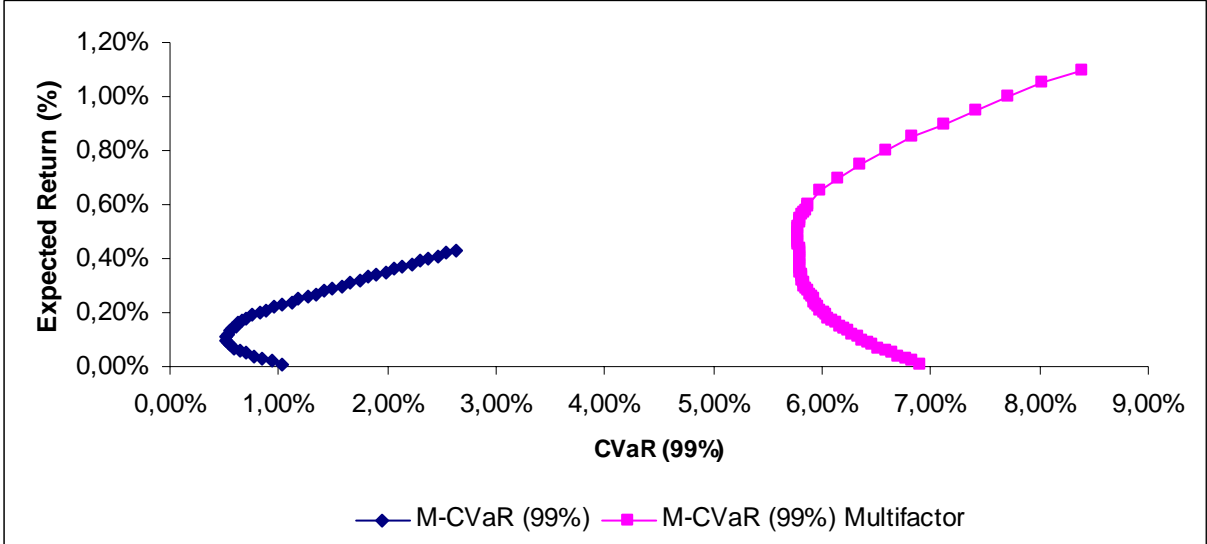


Figure 6: Comparing of the portfolios that minimize variance subject to constraints on expected return and sum of weights of the portfolio with portfolios that minimize *CVaR (99%)* subject to constraints on expected return, sum of weights of the portfolio and scenarios.

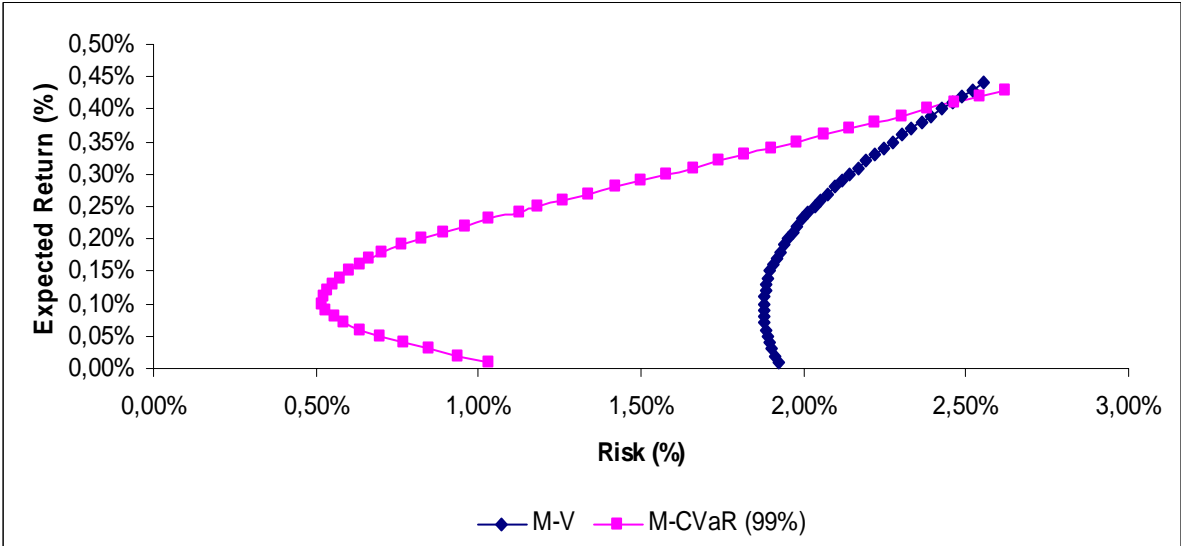


Figure 6 represents comparing of portfolios of the model (1)-(4) with portfolios from the model (5)-(10). Work of Rockafellar and Uryasev (2000) shows that normally distributed loss function leads to equivalency of these two approaches. In the case of the non-normal distribution it can cause significant differences of these methods.

3 CONCLUSION

Multifactor model of portfolio selection is proposed in a work of Fama (1996). Factor of recession is taken into consideration within a multifactor model of Mlynarovič (2001), where variance (or a standard deviation) is used as a measure of the risk. In a work of Rockafellar and Uryasev (2000) is showed that in the case of non-normally distributed returns, using of *VaR* (or *CVaR*) can remove problems with heavy tails. This work uses these facts and proposes model, where risk is minimized with constraints on scenarios; expected return and factor of recession. This model is applied to historical data of Dow Jones Industrial. Factor of recession leads to finding portfolios, which gives higher expected return but of course connected with higher risk as well and removes problem of non-normally distributed expected returns. This paper contains new application in MS Excel that generates efficient frontier in $M - V$ space and $M - CVaR$ space. This application affords possibility to take into consideration another constraints. According to fact, that this application is proposed in the space of MS Excel, it is widely accessible to different users and they do not need extra software.

Použitá literatúra

1. Fama, E.F. : Multifactor Portfolio Efficiency and Multifactor Asset Pricing, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 31, December 1996, pp. 441-465.
2. Mlynarovič, V.: Finančné investovanie, Teórie a aplikácie, Iura Edition, Bratislava, 2001.
3. Krokhamal, P.-Palmquist, J.-Uryasev, S.: Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraint, The Journal of Risk, V. 4, # 2, 2002, pp.11-27.
4. Rockafellar, R.T. – Uryasev, S.: Optimization of Conditional Value-at-Risk. Journal of Risk, 2, 2000, pp.21 –41.
5. Konno, H. – Waki, H.- Yuuku, A.: Portfolio Optimization under Lower Partial Risk Measures, Asia-Pacific Financial Markets, September 2002, pp.127-140, <http://www.gloriamundi.org/detailpopup.asp?Author1name=Konno%2C+Hiroshi&ID=453056785> (12.1.2007)

Kontaktné údaje

Ing. Zdenka Milánová

Institute of Economics, Faculty of Social and Economic Sciences, Comenius University in Bratislava,

Odbojárov 10/A, P.O. Box 129, 820 05 Bratislava 25.

Tel: (421 2) 50 11 76 26

email: milanova@fses.uniba.sk

KONŠTRUKCIA MNOŽINY INVESTIČNÝCH PRÍLEŽITOSTÍ Z FONDOV ESPA

Juraj Pekár

Abstract: This paper considers the opened mutual funds in Slovak Republic. Firstly the theoretical approach of portfolio model construction is presented. Than, this approach is used for application on data of ESPA funds supply by Asset Management of Slovenská sporiteľňa.

V príspevku je uvedený spôsob zostrojenia hranice množiny investičných príležitostí ako aj jeho aplikácia na podielové fondy pôsobiace v Slovenskej republike. V prvej časti je popísaná úloha prostredníctvom, ktorej vypočítame pre stanovenú úroveň výnosu, portfólio s minimálnym rizikom. Zostrojenie hranice množiny investičných príležitostí z podielových fondov ESPA možno nájsť v poslednej časti.

Pre našu analýzu sme vybrali fondy ESPA Slovenskej sporiteľne, pre ktoré prostredníctvom riešení úloh matematického programovania hľadáme efektívne portfóliá. Základné informácie o jednotlivých fondoch boli prezentované (Pekár 2007).

Konštrukcia modelu

Výnos portfólia

Investor pri svojom rozhodovaní neuvažuje o držbe jedného aktíva, ale o zvolení vhodnej kombinácii aktív (o portfóliu). Očakávaný výnos aktív obsiahnutých v portfóliu vyjadruje nasledovný vzťah:

$$E_p = \sum_{i=1}^n w_i E_i, \text{ príp. v maticovom tvare } E_p = \mathbf{w}^T \mathbf{E} \quad (1)$$

kde E_p výnos portfólia,

E_i výnos i -teho aktíva v portfóliu,

w_i váha i -teho aktíva v portfóliu (počiatočný podiel aktíva na celkovej investícii),

n počet aktív v portfóliu,

pričom platí:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \text{ príp. v maticovom tvare } \mathbf{w}^T \mathbf{e} = 1, \text{ kde } \mathbf{e} \text{ je jednotkový vektor.} \quad (2)$$

Riziko portfólia

Riziko portfólia môžeme charakterizovať pomocou rozptylu, príp. štandardnej odchýlky. Riziko portfólia závisí od rizík jednotlivých aktív ako aj od ich vzájomného vzťahu.

Pre rozptyl výnosu portfólia dostaneme:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}, \text{ príp. v maticovom tvare } \sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w} \quad (3)$$

kde w_i váha i -teho aktíva v portfóliu,

σ_{ij} ak $i = j$ tak hodnota je rovná rozptylu aktíva i

σ_{ij} ak i je rôzne od j tak hodnota je rovná kovariácii výnosov aktív i a j

n počet aktív v portfóliu,

C kovariačná matica (na diagonále sú rozptyly aktív a mimo diagonály kovariácie aktív)

Z rozptylu určíme štandardnú odchýlku:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}. \quad (4)$$

Formulácia úlohy

Na zostrojenie hranice množiny investičných príležitostí je potrebné určiť jednotlivé body z uvedenej hranice. Na získanie uvedených bodov riešime čiastkové úlohy, ktoré možno formulovať nasledovne: stanovíme si očakávaný výnos portfólia E_p , pričom pre uvedenú hodnotu výnosu hľadáme portfólio s najmenším rizikom.

Formulácia úlohy je nasledovná:

Cieľom je minimalizovať riziko, t.j. na základe vzťahu (3) máme nasledovnú účelovú funkciu:

$$\min \sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w} \quad (5)$$

Prvé ohraničenie definuje, že hľadané portfólio dosiahne stanovený výnos, druhé zahŕňa podmienku investovania práve celej sumy v investíciách a posledná, že investícia do jednotlivých aktív musí byť kladná, t.j.:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T \mathbf{E} &= E_p \\ \mathbf{w}^T \mathbf{e} &= 1 \\ \mathbf{w} &\geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Aplikácia

Vstupné data sú uvedené v tabuľke 1 (výnosy a riziká jednotlivých aktív) a v tabuľke 2 (kovariačná matica). Cieľom je zostrojiť hranicu množiny investičných príležitostí. Body z uvedenej hranice sme získali riešením úlohy definovanej vzťahmi (5) a (6) tak, že sme postupne menili požadované výnosy (od hodnoty 5 % do 40 %). V tabuľke 3 sú uvedené jednotlivé riešenia (z riešenia vidíme aký percentuálny podiel musíme investovať do aktív – stĺpce 3 až 10, aby sme pri stanovenom výnose – stĺpec 2 – dosiahli minimálne riziko – stĺpec 1), na získanie ktorých sme použili Solver pod MS Excelom. Zobrazenie hranice množiny investičných príležitostí, v priestore výnos (vážený priemer stredného očakávaného výnosu jednotlivých aktív) – riziko (štandardná odchýlka portfólia), vidíme na obrázku 1.

Na záver možno konštatovať, že pomocou teórie portfólia možno, na základe údajov za predchádzajúce obdobia, získať ucelený pohľad na investovanie. Uvedený nástroj nám pomôže pri rozhodovaní o investovaní. Analýza bola zameraná na investičné ESPA fondy Slovenskej sporiteľne, pričom na základe výsledkov z tabuľky 3 vidíme rozloženie investície pri rôznych úrovniach výnosov.

Tabuľka 1

Aktíva	Výnos	Štandardná odchýlka
EspaBD_EUR	10,35%	35,42%
EspaBD_SKK	4,35%	29,47%
EspaSA_SKK	-3,25%	77,27%
EspaSA_USD	4,19%	63,52%
EspaSE_EUR	15,07%	72,66%
EspaSE_SKK	9,08%	71,28%
EspaST_EUR	42,49%	143,11%
EspaST_SKK	36,38%	139,11%

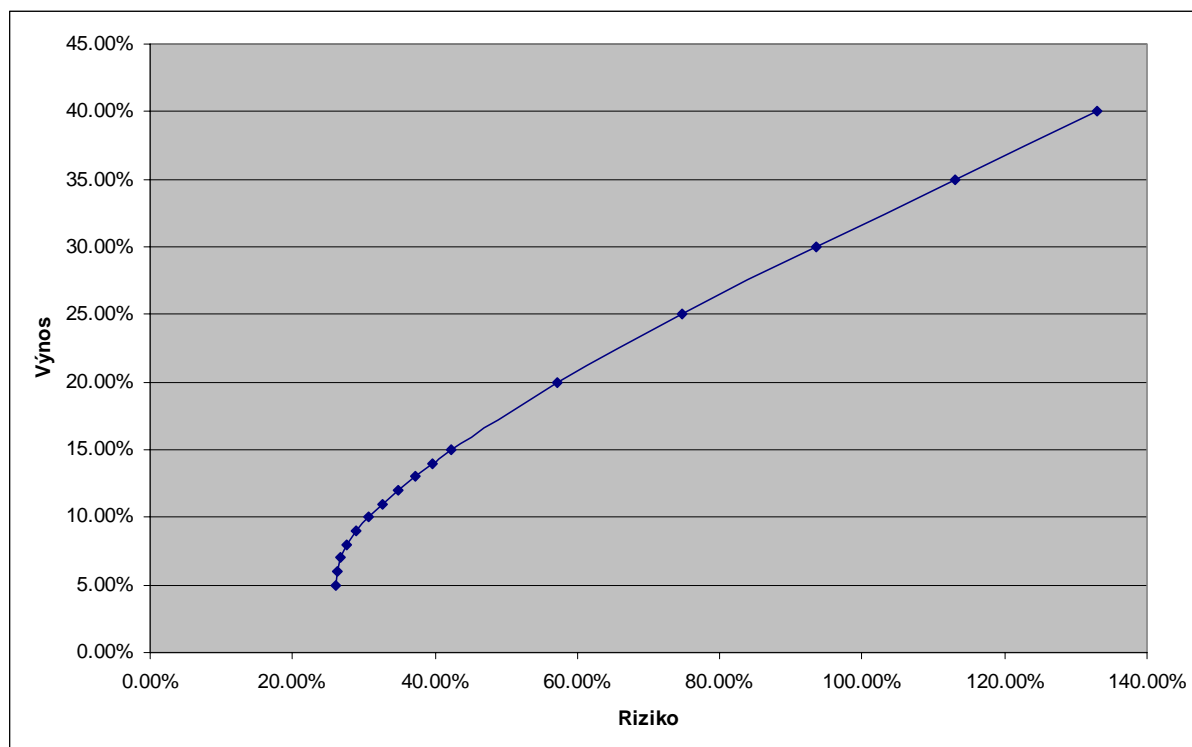
Tabuľka 2

	EspaBD EUR	EspaBD SKK	EspaSA SKK	EspaSA USD	EspaSE EUR	EspaSE SKK	EspaST EUR	EspaST SKK
EspaBD_EUR	0,12549	0,05900	-0,03632	0,04879	0,06068	-0,00576	0,19163	0,12515
EspaBD_SKK	0,05900	0,08682	0,02046	0,00069	0,00387	0,03167	0,08581	0,11371
EspaSA_SKK	-0,03632	0,02046	0,59700	0,31797	0,37116	0,42760	0,44983	0,50735
EspaSA_USD	0,04879	0,00069	0,31797	0,40343	0,37542	0,32738	0,50560	0,45811
EspaSE_EUR	0,06068	0,00387	0,37116	0,37542	0,52800	0,47088	0,68069	0,62434
EspaSE_SKK	-0,00576	0,03167	0,42760	0,32738	0,47088	0,50803	0,57525	0,61326
EspaST_EUR	0,19163	0,08581	0,44983	0,50560	0,68069	0,57525	2,04817	1,94442
EspaST_SKK	0,12515	0,11371	0,50735	0,45811	0,62434	0,61326	1,94442	1,93520

Tabuľka 3

Riziko portfólia	Výnos portfólia	Podiel fondu v portfóliu							
		EspaBD		EspaSA		EspaSE		EspaST	
		EUR	SKK	SKK	USD	EUR	SKK	EUR	SKK
26.18%	5.00%	18.77%	65.19%	6.08%	9.96%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
26.28%	6.00%	31.09%	54.60%	4.42%	7.13%	0.00%	2.76%	0.00%	0.00%
26.77%	7.00%	39.66%	46.60%	1.90%	3.02%	0.00%	8.83%	0.00%	0.00%
27.59%	8.00%	49.82%	36.26%	0.00%	0.00%	0.00%	13.92%	0.00%	0.00%
28.99%	9.00%	59.19%	25.23%	0.00%	0.00%	0.00%	14.50%	1.08%	0.00%
30.74%	10.00%	52.69%	30.79%	0.00%	0.00%	10.09%	3.14%	3.29%	0.00%
32.73%	11.00%	58.47%	24.02%	0.00%	0.00%	8.02%	4.01%	5.48%	0.00%
34.91%	12.00%	61.07%	20.41%	0.00%	0.00%	9.09%	1.76%	7.67%	0.00%
37.26%	13.00%	64.24%	16.29%	0.00%	0.00%	9.59%	0.01%	9.87%	0.00%
39.74%	14.00%	77.50%	2.05%	0.00%	0.00%	0.00%	8.39%	12.06%	0.00%
42.33%	15.00%	78.58%	0.00%	0.00%	0.00%	2.52%	4.63%	14.27%	0.00%
57.14%	20.00%	69.99%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	30.01%	0.00%
74.67%	25.00%	54.43%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	45.57%	0.00%
93.56%	30.00%	38.88%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	61.12%	0.00%
113.12%	35.00%	23.32%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	76.68%	0.00%
133.07%	40.00%	7.76%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	92.24%	0.00%

Obrázok 1



- [1] Markowitz, H.: Portfolio selection: Efficient Diversification of Investments. John Wiley & Sons, (1959).
- [2] Markowitz, H. M. (1987): Mean-variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Basil Blackwell, New York.
- [3] Mlynarovič, V.: Finančné investovanie. Vydavateľstvo IURA Edition, 2001.
- [4] Pekár, J.: Výber investičného fondu ESPA metódou PROMETHEE. Medzinárodný seminár Využitie kvantitatívnych metód v praxi, Čimhová 2007.
- [5] <http://www.amslsp.sk/> (10.9.2007)

Kontaktné údaje

Mgr. Juraj Pekár, PhD.
KOVE, FHI
Ekonomická univerzita Bratislava
e-mail: pekar@euba.sk

APLIKACE MODIFIKOVANÉHO IS-MP-IA MODELU EKONOMIKY ČR V PROGNÓZOVÁNÍ

APPLICATION OF MODIFIED IS-MP-IA MODEL OF CZECH ECONOMY IN PROGNOSIS

Adéla Ráčková

Abstrakt

Zahrnutí ekonomických charakteristik EU do modifikovaného IS-MP-IA modelu ekonomiky ČR zlepšuje interpretaci modelu. Odhadnuté IS a MP křivky zachycují vliv EU na českou ekonomiku (resp. český HDP). Lze říci, že užití GARCH modelů je vhodné pro odhad modifikovaného IS-MP-IA modelu a následnou predikci vývoje základních makroekonomických veličin, které ovlivňují ekonomiku ČR před i po vstupu do EU.

***Klíčová slova:** IS-MP-IA model; GARCH model*

Abstract

The involvement of EU economic characteristics in the modified IS-MP-IA model of the Czech economy improves the interpretation of the model. The influence of EU economy on the Czech economy (i.e. its GDP) is demonstrated with the estimated IS and MP curves. We may conclude that the GARCH models seem to be suitable tools for the estimation of modified IS-MP-IA model and for subsequent prognosis for development of basic macroeconomic variables relevant for the Czech economy before as well as after its accession to EU.

***Key words:** IS-MP-IA model; GARCH model*

1 ÚVOD

Romerův model, v práci použitý pro ekonometrické modelování ekonomiky ČR, je založen na jednotlivých makroekonomických vztazích, proto je srozumitelný, a přesto umožňuje zachytit podstatné vlivy. Díky tomuto modelu lze také snadno interpretovat dopady prováděné měnové a fiskální politiky a také vliv ekonomiky Evropské unie na ekonomiku ČR před i po vstupu ČR do EU a při přípravě ČR na vstup do Evropské měnové unie (EMU).

Cílem práce je odhadnout makroekonomický model české ekonomiky s užitím GARCH modelů a použít tento model pro předpověď. Záměrem je také modifikovat IS-MP-IA model a rozšířit jej o veličiny týkající se EU, a zachytit tak vliv ekonomiky EU na ekonomický vývoj ČR.

2 VÝCHOZÍ MAKROEKONOMICKÝ MODEL

Model IS-MP-IA byl navržen Romerem (2000). Tento model aplikoval na konkrétní země např. Hsing. Analýza týkající se České republiky byla konstruována na datech 1994:Q1 – 2003:Q2 (Hsing, 2004).

Klíčovým předpokladem tohoto nového přístupu je, že centrální banka sleduje pravidlo **reálné úrokové míry**. Centrální banky tedy provádí svou měnovou politiku tak, aby reálná

úroková míra vystupovala jako funkce dvou makroekonomických veličin – inflace a produktu.

Pravidlo reálné úrokové míry popisuje chování centrálních bank v současnosti daleko lépe než pravidlo fixního objemu peněžní zásoby. Většina dnešních centrálních bank sleduje při provádění své měnové politiky zápujční úrokové sazby na mezibankovním trhu.

Problémy s tradiční monetaristickou koncepcí, která byla založena na řízení měnové báze a peněžní zásoby, vedly k nové politice řady centrálních bank. V průběhu devadesátých let některé centrální banky přistoupily na tzv. **přímé cílování inflace**, kdy inflačního cíle má být dosaženo prostřednictvím řízení krátkodobé úrokové sazby centrální banky. Tento systém je využíván také ČNB a to od roku 1998 (např. Mandel a Tomšík, 2003).

Pro popis trhu zboží a služeb v modelu slouží křivka IS. Formulace rovnice **křivky IS** vychází z modelu IS-LM, přičemž se opouští od předpokladu uzavřené ekonomiky, za kterého je tento model konstruován.

Křivka IS v Romerově IS-MP-IA modelu pro ČR, jak uvádí Hsing (2004), má tvar

$$Y = C(Y-T) + I(R) + G + NX(\varepsilon, WY), \quad (1)$$

kde Y je HDP ČR, C spotřeba, T vládní příjmy z daní, I investice, R reálná úroková míra, G vládní výdaje, ε reálný měnový kurz české koruny k dolaru, WY světový HDP.

Trh peněz, resp. politiku centrální banky, popisuje v tomto modelu **křivka MP**. Křivka MP je konstruována za předpokladu, že centrální banka upustila od svého cíle v podobě fixního objemu peněžní zásoby, ale stanovuje cíl v podobě výše reálné úrokové míry. Pravidlo reálné úrokové míry v nerozšířené podobě (Romer, 2000) zachycuje vztah

$$R = R(\pi), \quad (2)$$

kde π je míra inflace.

Třetí část modelu se týká inflačního přizpůsobování (tj. Inflation Adjustment – IA), **křivka IA** zde nahrazuje křivku AS, a je založena na dvou zjednodušujících předpokladech. Jde o okamžitý vliv změny agregátní nabídky na produkt, kdy produkt na tuto změnu reaguje rychleji než inflace, a stabilní inflaci v případě, že se ekonomika nachází na úrovni potenciálního produktu a nevyskytují se zde žádné inflační šoky.

Rovnováha trhu peněz je nejčastěji vyjadřována rovnicí (Romer, 2000)

$$M/P = L(i, Y), \quad (3)$$

kde levá strana představuje nabídku reálných peněžních zůstatků a pravá strana poptávku po reálných peněžních zůstatcích, která dle předpokladu klesá s růstem nominální úrokové míry a roste spolu s rostoucím HDP.

Po rozložení nominální úrokové míry i z rovnice (3) na jednotlivé složky je reálná úroková míra¹ zachycena přímo v podmínce rovnováhy peněžního trhu (Romer, 2000)

$$M/P = L(r + \pi^e, Y), \quad (4)$$

kde π^e je očekávaná inflace.

Modelování otevřené ekonomiky s volně pohyblivým kurzem často vychází z předpokladů, za kterých se pak domácí úroková míra musí rovnat světové úrokové míře.

¹ K rozkladu byla užitá Fisherova rovnice, dle které je v reálné úrokové míře zahrnuta také riziková prémie, a tedy reálná úroková míra může růst také v důsledku růstu této prémie.

Model IS-MP-IA modeluje ekonomiku za předpokladu, že domácí úroková míra se může lišit od světové úrokové míry.

3 EKONOMETRICKÝ MODEL ČESKÉ EKONOMIKY

Pro modelování ekonomiky České republiky byly využity některé modifikace modelu IS-MP-IA, které navrhli Romer (2000) a Hsing (2004).

S ohledem na skutečnost, že se ČR od r. 1995 připravovala na základě plnění evropské dohody a kodaňských kritérií pro vstup do EU a k 1. květnu 2004 do EU vstoupila, jeví se závislost české ekonomiky na ekonomice EU silnější, než je tomu v případě světové ekonomiky. Tuto závislost potvrzují také data týkající se zahraničního obchodu ČR, který byl v letech 1999-2002 tvořen z 64,9 % z celkového obrátu zahraničním obchodem s EU 15, následováno Slovenskem a Polskem (např. Plchová, 2004). Nadále se proto využívá ukazatelů EU a nikoliv světových.

ČNB se přiklonila k režimu cílování inflace na konci roku 1997. Systém cílování inflace byl v ČR historicky poprvé spojen s dezinflačním procesem (Mandel, Tomšík, 2003).

Romer (2000) uvedl, že také v Německu, kde se stanovovaly cíle v podobě peněžní zásoby již od roku 1975 a velikost peněžní zásoby zde hrála velkou roli při oficiálních politických rozhodování, stanovovala Deutsche Bundesbank cíle peněžní zásoby explicitně závislé na inflačních cílech a implicitně závislé na HDP a směnném kurzu. A tedy i německou monetární politiku lze v posledních 25-ti letech popsat závislostí úrokové míry na míře inflace, HDP a kurzu marky, resp. eura. Na základě těchto skutečností je možné rovnici, která vysvětluje závislosti úrokové míry na ostatních veličinách, použít také pro popis monetární politiky ČNB i před obdobím zavedení systému inflačního cílování. ČR se nyní připravuje na vstup do eurozóny a s tím je spojeno plnění konvergenčních, tzv. maastrichtských kritérií.

3.1 Modifikace IS-MP-IA modelu pro ČR

Zahrnutím předpokladu, že rozhodování banky ohledně reálné úrokové míry je závislé jak na inflaci, tak na HDP, získáme z rovnice (2) její modifikovaný tvar

$$r = r(Y, \pi), \quad (5)$$

a tedy reálná úroková míra roste spolu s růstem produktu a růstem inflace. Hsing (2004) do této rovnice zahrnul další proměnné, a to reálný směnný kurz CZK/USD a světovou úrokovou míru. Směnný kurz byl do modelu zaveden v podobě proměnné (Hušek, Švarcová, 2007).

Na základě zejména dvou maastrichtských kritérií, týkajících se inflační a kurzové stability, lze usuzovat, že reálná úroková míra v ČR bude ovlivněna také inflací a reálnou úrokovou mírou v EU, a proto byly tyto proměnné do rovnice zahrnuty (Hušek, Švarcová, 2007).

Rovnice (3.1) bude tedy modifikována

$$R = R(Y, \pi, \pi^{EU}, R^{EU}, \varepsilon), \quad (6)$$

kde Y je HDP ČR, π míra inflace v ČR, π^{EU} míra inflace v EU, R^{EU} reálná úroková míra EU a ε je reálný směnný kurz CZK/EUR.

Podobně byla modifikována také rovnice (1) popisující křivku IS

$$Y = C(Y-T) + I(R) + G + NX(\varepsilon, Y^{EU}), \quad (7)$$

kde Y je HDP ČR, C spotřeba, T vládní příjmy z daní, I investice, R reálná úroková míra, G vládní výdaje, ε reálný měnový kurz CZK/EUR, Y^{EU} HDP EU (Hušek, Švarcová, 2007).

Empiricky již bylo ověřeno, že zahraniční obchod mezi ČR a EU závisí výrazně více na HDP EU než na HDP ČR, kde se závislost ukázala jako statisticky nevýznamná (Švarcová, 2004).

Lze předpokládat, že se u křivky IS popsané rovnicí (7) vyskytne podobný problém s multikolinearitou mezi veličinami G a T jako v případě (1). Z důvodu redukce multikolinearity užijí stejného zjednodušení jako Hsing (2004) a nadále budu pracovat s rozpočtovým deficitem $D = G - T$.

Do navrhovaného modelu pro ekonomiku ČR není zabudována třetí rovnice – křivka IA. Míra inflace ČR by mohla být zavedena do modelu jako endogenní veličina, jejíž vysvětlující proměnné by byly např. směnný kurz CZK/EUR, inflace v EU apod. Zabudování další rovnice do modelu by bylo však na úkor jednoduchosti modelu. Dalším důvodem, proč tak neučinit, je skutečnost, že v dosud provedených analýzách se zahrnutí míry inflace v ČR do jednorovnicového modelu odvozeného z rovnic (6) a (7) ukázalo jako statisticky významné (např. Švarcová, 2005).

Řešením dvou výše uvedených simultánních rovnic (6) a (7) získáme pro rovnovážný produkt

$$\bar{Y} = f(D, \pi, \varepsilon, Y^{EU}, R^{EU}, \pi^{EU}) \quad (8)$$

Lze očekávat, že rovnovážný produkt \bar{Y} bude ovlivňován těmito veličinami následujícími způsoby: S růstem rozpočtového deficitu D roste HDP bez ohledu na to, zda je nárůst deficitu způsoben růstem vládních výdajů na nákup statků a služeb G či poklesem daní T . Rostoucí inflaci by centrální banka měla bránit opatřeními, která vedou k růstu domácí úrokové míry. Vyšší úroková míra omezí investice, což povede k poklesu HDP ČR.

Depreciace kurzu bude působit na HDP ČR přes čistý export. Depreciace zdraží dovozy a zlevní vývozy, což bude mít za následek zlepšení čistého exportu, a to povede k růstu HDP. Prioritním cílem ČNB je ochrana kurzu, a proto bude centrální banka reagovat opatřeními, které povedou k růstu úrokové míry, což bude současně snižovat inflaci a investice a povede k poklesu HDP. Výsledný dopad depreciace kurzu na HDP ČR bude záviset na tom, který z těchto dvou kanálů převáží.

Rostoucí HDP v EU bude mít za následek růst exportů v ČR, což bude zlepšovat čistý export NX , který bude pozitivně ovlivňovat HDP ČR. Růst úrokové míry v EU povede k růstu úrokové míry v ČR. Vyšší úroková míra má negativní dopad na investice, a proto dojde k poklesu HDP ČR. Růst inflace v EU může v důsledku plnění maastrichtských kritérií způsobit růst inflace v ČR, a tedy pokles HDP ČR, nebo je rostoucí inflace v EU doprovázena rostoucí úrokovou mírou v EU, která bude opět zvyšovat domácí úrokovou míru, a to opět povede k poklesu HDP ČR (Hušek, Švarcová, 2007).

4 POUŽITÁ METODOLOGIE

GARCH model je zástupcem třídy modelů charakterizující tzv. **podmíněnou heteroskedasticitu**. Tyto modely se zabývají variabilitou časových řad, tedy druhým podmíněným momentem. Umožňují tak zachytit měnící se podmínky nejistoty na trhu a zpřesňují intervalové předpovědi časových řad (např. Arlt, Arltová, 2007). Modely jsou založeny na modelování rozptylu náhodné složky v daném období a jsou využívány zejména pro modelování heteroskedastických časových řad.

GARCH model je váženým průměrem minulých čtvercových odchylek. Modely pracují s degresivními vahami, které však nikdy nejsou nulové. Tyto modely jsou jednoduché na odhad a dokonce ve své nejjednodušší podobě jsou úspěšné při předpovědích podmíněné variability. Dle nejpoužívanějšího vyjádření GARCH modelu je nejlepší předpověď

variability pro příští období váženým průměrem dlouhodobých průměrů variability, rozptylu předpovídaného pro toto období a novou informací v tomto období, která je zachycena čtverci reziduí nedávných pozorování (Engle, 2001).

4.1 GARCH (p,q) model

Nechť $\{\varepsilon_t\}$ je podmíněný heteroskedastický proces a ψ_t jsou všechny relevantní informace až do času t .

Tvar GARCH (p,q) modelu je následující (Bollerslev, 1986)

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t), \quad (9)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (10)$$

za podmínek $p \geq 0, q > 0$ a podmínek zaručujících kladný podmíněný rozptyl $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, q, \beta_i \geq 0$ pro $i=1, 2, \dots, p$, kde h_t je podmíněný rozptyl, který je oproti tradičním modelům časových řad v čase proměnlivý.

Pro odhad parametrů GARCH (p,q) modelu definovaného (9), (10) se užívá metoda maximální věrohodnosti (Bollerslev, 1986).

GARCH model se obvykle odhaduje pomocí **kvazi-maximálně věrohodného odhadu**.

4.2 Konkrétní model aplikovaný na data

HDP ČR nemá ani nulovou střední hodnotu ani nulovou šikmost². Vlastnosti, které jsou předpokládány u veličiny ε_t modelované pomocí GARCH modelu, nejsou tedy splněny. Pro modelování časové řady se namísto původních hodnot často užívají hodnoty, které jsou již nějakým způsobem upraveny. Lze využít teorie časových řad a modelovat namísto veličiny ε_t rezidua některého ARMA modelu.

V situaci, kdy známe veličiny, které ovlivňují vývoj HDP ČR, je možné namísto hodnot ε_t využít reziduí regresního vztahu (Hušek, Švarcová, 2007) a dále předpokládat, že tato rezidua již uvedené vlastnosti splňují.

Odhadovaný GARCH (p,q) model bude tedy ve tvaru

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} = X_t' \beta + u_t, \quad (11)$$

$$u_t = e_t h_t^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

$e_t \sim N(0,1)$; e_t, e_s nezávislé pro $s \neq t$,

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad (13)$$

$t = 1, \dots, T, \alpha_0 > 0, \alpha_i, \beta_j \geq 0$

kde ε_t je endogenní proměnná, která je podmíněna veškerou disponibilní informací ψ_{t-1} o proměnné ε_t do období $t - 1$, u_t představuje v (11) náhodnou složku, která je vyjádřena jako funkce e_t a $h_t^{1/2}$. e_t jsou nezávislé a identicky normálně rozdělené náhodné složky a h_t je rozptyl u_t . X_t je vektor vysvětlujících proměnných a β vektor jejich parametrů.

² Střední hodnota HDP ČR = $4,1483 \cdot 10^5$, šikmost = 0,88714

5 SPECIFIKACE A ODHAD MODELŮ

Pro specifikaci modelu (8) jsou použita data z čtvrtletních pozorování za období 2/1995 (tj. nejstarší dostupné údaje) – 2/2006. Další data z roku 2006 budou využita pro předpověď ex post.

Jsou použity tyto domácí veličiny: D - rozpočtový schodek/deficit v miliardách Kč ve stálých cenách z roku 1996. Y^{CR} - hrubý domácí produkt České republiky v milionech Kč ve stálých cenách roku 1995, očištěný od sezónnosti a pracovních dní. ε - reálný směnný kurz koruny k euru (CZK/EUR), který byl odvozen z čtvrtletních průměrů devizového nominálního směnného kurzu a indexů spotřebitelských cen (HICP). π^{CR} - míra inflace ČR, která byla odvozena z harmonizovaného indexu spotřebitelských cen pro ČR (HICP).

Všechny veličiny týkající se Evropské unie, byly přepočteny pro EU 15: Y^{EU} - hrubý domácí produkt Evropské unie v milionech eur ve stálých cenách a kurzu roku 1995, očištěný od sezónnosti a pracovních dní. π^{EU} - míra inflace EU, která byla odvozena z harmonizovaného indexu spotřebitelských cen pro EU 15.

Rozpočtový deficit byl získán z internetových stránek Mezinárodního měnového fondu – International Monetary Fund: International Financial Statistics. Směnný kurz byl získán z internetových stránek ČNB. Ostatní data byla získána ze stránek Eurostatu. Čtvrtletní data pro inflaci ČR a EU 15 byla napočtena z měsíčních dat.

S výjimkou HDP ČR a HDP EU, které jsou již očištěny od sezónnosti, byly ostatní veličiny pro účely této práce očištěny od sezónnosti Hodrick-Prešcottovým filtrem.

Modelovaná rezidua byla získána z lineárního regresního vztahu odhadnutého metodou nejmenších čtverců

$$Y_t = X_t' \beta + u_t, \quad (14)$$

kde Y_t je HDP ČR, X_t' je vektor zbývajících proměnných. V podobě nula-jednotkové proměnné byl zařazen do regresního vztahu také vstup ČR do EU. Závislost HDP ČR na vstupu do EU se však ukázala jako statisticky nevýznamná, což jen potvrdilo předchozí hypotézu, že ČR byla v době vstupu již dostatečně přizpůsobena a nedošlo tudíž k žádnému „šoku“. Proto se dále se vstupem ČR do EU nepracuje.

5.1 Odhady GARCH (p,q) modelů od roku 1995

Postupně byly zvoleny různé hodnoty parametrů p , q v GARCH (p,q) modelu a odhadnuty modely GARCH (0,1), GARCH (1,0), GARCH (1,1), GARCH (0,2), GARCH (2,0), GARCH (1,2), GARCH (2,1) a GARCH (2,2). Zahrnutí všech α_i a β_j parametrů vycházelo u odhadovaných modelů statisticky významné. V GARCH (0,1) modelu vyšlo zahrnutí parametrů α_0 i α_1 významné. V GARCH (1,0) modelu vycházelo zcela nevýznamné zahrnutí parametru α_0 do modelu. V GARCH (1,1) vycházelo jako nevýznamné zahrnutí parametrů α_1 i β_1 . Zcela nevýznamné bylo také zahrnutí parametrů α_1 a α_2 v modelu GARCH (0,2). V GARCH (2,0) modelu byl jediný významný parametr β_1 , zatímco parametry α_0 a β_2 byly statisticky zcela nevýznamné. V GARCH (1,2) modelu bylo nevýznamné zahrnutí parametrů α_1 , α_2 i β_1 , na 1 % hladině významnosti nebyl významný ani jeden z parametrů modelu. V GARCH (2,1) modelu vycházelo zahrnutí parametrů α_0 , α_1 a β_2 zcela nevýznamné, přičemž parametry α_1 a β_1 nesplňovaly podmínku $\alpha_i \geq 0$ a $\beta_j \geq 0$. Tato podmínka nebyla splněna ani v případě modelu GARCH (2,2) a parametrů α_2 i β_1 . Zcela nevýznamné pak vycházely parametry α_1 , α_2 a parametr β_1 byl nevýznamný.

Tab. č. 1: Parametry a jejich významnosti GARCH (p, q) modelů na datech 2/1995-2/2006

	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2
GARCH (0,1)	79872.5 (0.003)	1 (0)	-	-	-
GARCH (1,0)	$4.54 \cdot 10^{-5}$ (1)	-	-	0.95 (0)	-
GARCH (1,1)	125803 (0.035)	0.940737 (1)	-	0.0592630 (0.359)	-
GARCH (0,2)	79872.5 (0.003)	1 (1)	0 (1)	-	-
GARCH (2,0)	$4.54 \cdot 10^{-5}$ (1)	-	-	0.95 (0)	0 (1)
GARCH (1,2)	125803 (0.035)	0.940737 (1)	0 (1)	0.05926 (0.359)	-
GARCH (2,1)	$4.5399 \cdot 10^{-5}$ (1)	-0.02327 (1)	-	1.02327 (0)	$3.03 \cdot 10^{-11}$ (1)
GARCH (2,2)	82593.3 (0.025)	1.01821 (1)	-0.166 (1)	-0.0182 (0.699)	0.166 (0.013)

5.2 Odhad GARCH(p,q) modelů od roku 1996

Z vývoje HDP ČR je patrné, že by bylo vhodné vypustit z modelu počáteční pozorování a odhadnout model pro časovou řadu od druhého čtvrtletí roku 1998. Tyto modely se však nepodařilo odhadnout. Časová řada byla zkrácena o tři období na počátku, a tím byly alespoň odstraněny zlomy v HDP ČR v roce 1995. Následující odhady GARCH (p,q) modelů jsou tedy pro období 1/1996 až 2/2006.

Tabulka 2 zachycuje odhady GARCH modelů při zahrnutí všech proměnných do modelu. GARCH (1,0) a GARCH (2,0) byly sice odhadnuty, ale software nevyjádřil statistické vlastnosti jednotlivých parametrů. Modely GARCH (2,1) a GARCH (2,2) se nepodařilo odhadnout vůbec. U GARCH (0,2) a GARCH (1,2) modelů je nevýznamný parametr α_2 , není třeba tedy uvažovat složitější model než GARCH (1,1). U GARCH (1,1) modelu vychází statisticky nevýznamná konstanta α_0 , tu však nelze z modelu vypustit, protože použitý software tuto možnost nenabízí. Ostatní parametry ve všech odhadnutých modelech jsou statisticky významné. Při srovnání tabulek 1 a 2 je možné konstatovat, že GARCH (p,q) modely aplikované na časové řady od prvního čtvrtletí roku 1996 dávají statisticky významnější odhady.

Tab. č. 2: Parametry a jejich významnosti GARCH (p, q) modelů na datech 1/1996-2/2006

	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2
GARCH (0,1)	13663 (0.001)	0.802500 (0.003)	-	-	-
GARCH (1,0)	Nepodařilo se numericky vyjádřit				
GARCH (1,1)	84841.5 (0.114)	0.653468 (0.012)	-	0.286260 (0.049)	-
GARCH (0,2)	213663 (0.001)	0.802500 (0.003)	0 (1)	-	-
GARCH (2,0)	Nepodařilo se numericky vyjádřit				
GARCH (1,2)	0	0.653468 (0.012)	0 (1)	0.286260 (0.050)	-
GARCH (2,1)	Nepodařilo se odhadnout				
GARCH (2,2)	Nepodařilo se odhadnout				

5.3 Předpovědi

S ohledem na relativně krátké časové řady byly provedeny předpovědi ex post pouze pro třetí a čtvrté čtvrtletí roku 2006.

Tab. č. 3: Predikované a skutečné hodnoty HDP ČR

		Období	Předpověď	Skutečná hodnota ³	Procentní odchylka ⁴	Směrodatná odchylka ⁵
Aplikace na datech 2/1995 - 2/2006	GARCH (1,1)	2006 q 03	441880,2161	511935,9	- 13,68 %	515,8
		2006 q 04	441327,6179	511078,5	- 13,65 %	626
	GARCH (1,1) - bez HDP EU	2006 q 03	445509,2161	511935,9	- 12,98 %	585,6
		2006 q 04	445568,6179	511078,5	- 12,81 %	686,4
	GARCH (0,1)	2006 q 03	447411,2161	511935,9	- 12,60 %	441,5
		2006 q 04	447458,6179	511078,5	- 12,44 %	524,2
	GARCH (0,1) - bez HDP EU	2006 q 03	451774,2161	511935,9	- 11,75 %	524,4
		2006 q 04	452263,6179	511078,5	- 11,81 %	612,6
Aplikace na datech 1/1996 - 2/2006	GARCH (1,1)	2006 q 03	437460,2161	511935,9	- 14,55 %	503,5
		2006 q 04	436706,6179	511078,5	- 14,55 %	568,4
	GARCH (1,1) - bez HDP EU	2006 q 03	438675,2161	511935,9	- 14,31 %	531,3
		2006 q 04	438101,6179	511078,5	- 14,28 %	594,4
	GARCH (0,1)	2006 q 03	440523,2161	511935,9	- 13,95 %	639,4
		2006 q 04	440104,6179	511078,5	- 13,89 %	736
	GARCH (0,1) - bez HDP EU	2006 q 03	440425,2161	511935,9	- 13,97 %	638,9
		2006 q 04	439990,6179	511078,5	- 13,91 %	435,5

Z tabulky 3 vyplývá, že nejlepší předpovědi ze všech specifikovaných modelů poskytuje GARCH (0,1) model vyjádřený v aplikaci na datech 2/1995 – 2/2006 bez zahrnutí HDP EU jako vysvětlované proměnné. Tento model dokázal předpovědět přibližně 88,5 % skutečné hodnoty HDP ČR, a to bylo o 1 procentní bod lepší předpověď než v případě GARCH (1,1) bez zahrnutí HDP EU a dokonce o 2 procentní body lepší předpověď než u modelu GARCH (1,1) při zahrnutí všech proměnných.

Tab. č. 4: Odhad modelu GARCH (0,1) na datech 2/1995 – 2/2006 bez HDP EU

	Odhad parametru	Směrodatná odchylka	Robustní směrodatná odchylka	t-hodnota	t-pravděpodobnost
Konstanta	-3705260	122600	105100	-35,3	0
Deficit	-11922,9	464,6	466,2	-25,6	0
Inflace ČR	-26613,6	2849	3677	-7,24	0
Inflace EU 15	710288	30830	26790	26,5	0
Směnný kurz	95234,7	3015	2542	37,5	0
Úroková míra	30619,3	1859	1801	17	0
Trend	16494,2	517,1	451,2	36,6	0
α_0	100296	40190	30760	3,26	0,002
α_1	1				

³ Skutečná hodnota je vyjádřena ve stálých cenách roku 1995, očištěna od sezónnosti a pracovních dní

⁴ Procentní odchylka předpovědi od skutečné hodnoty

⁵ Odmocnina z podmíněného rozptylu

Pro přesnější předpověď je vhodné použít model, který je konstruovaný na delší časové řadě. Z hlediska statistických vlastností se jako vhodnější jeví modely konstruované na časové řadě od prvního čtvrtletí roku 1996.

Všechny zde uvedené předpovědi se liší od skutečných hodnot o více než 11 %. Tempo růstu HDP ČR se od druhého čtvrtletí roku 1998 zvyšuje. Výjimku tvoří pouze rok 2002, proto byly předpovědi zpřesňovány zavedením exponenciálního trendu $e^{\gamma t}$ do rovnice (11). Konstanta γ byla zvolena kalibrací. Tyto předpovědi byly provedeny na časových řadách 2/1995 – 2/1996.

Z tabulky 5 je patrné, že zavedení exponenciálního trendu do modelu zlepšilo předpovědi ex post až o 10 procentních bodů.

Tab. č. 5: Předpovědi s exponenciálním trendem $\gamma = 0,018$

	Období	Předpověď	Skutečná hodnota	Odchylka v %	Směrodatná odchylka
GARCH (1,1)	2006 q 03	502557,22	511935,9	-1,83 %	2694,92
	2006 q 04	512150,62	511078,5	0,21 %	2707,30
GARCH (1,1) - bez HDP EU	2006 q 03	505817,22	511935,9	-1,20 %	1415,10
	2006 q 04	515799,62	511078,5	0,92 %	1437,05
GARCH (0,1)	2006 q 03	502782,22	511935,9	-1,79 %	2792,01
	2006 q 04	512376,62	511078,5	0,25 %	2807,94
GARCH (0,1) - bez HDP EU	2006 q 03	505542,22	511935,9	-1,25 %	3036,59
	2006 q 04	515339,62	511078,5	0,83 %	3056,65

Z testovaných hodnot konstanty γ poskytuje nejlepší předpovědi model s exponenciálním trendem při $\gamma = 0,018$. Všechny předpovědi pro období 3/2006 jsou mírně podhodnoceny, podhodnocení u žádného z modelů nedosahuje 2 %. Předpovědi pro období 4/2006 jsou naopak mírně nadhodnoceny, nadhodnocení však není větší než 1 %.

6 EKONOMICKÁ INTERPRETACE ODHADNUTÉHO MODELU

U všech odhadnutých modelů vycházela znaménka koeficientů až na výjimky ve shodě s ekonomickou teorií. Do všech modelů byl zahrnut trend, proto nebude mít příliš smysl interpretace absolutních velikostí parametrů. Tyto parametry vyjadřují citlivost HDP na jednotlivé veličiny.

Do odhadnutých GARCH modelů nebyl zahrnut HDP EU, a to kvůli statistické nevýznamnosti. Pro teoretický model to znamená, že HDP EU nemá vliv na HDP ČR, resp. na vývozy a dovozy ČR. Jedním z možných vysvětlení tohoto vztahu může být způsob zjišťování této veličiny a agregace dat. Další možností je, že HDP EU je již v souladu s IS-MP modelem pro ekonomiku EU ve značné míře zahrnut ve vývoji úrokové míry EU (Švarcová, 2005). Skutečností také je, že HDP ČR dosahuje zejména v posledních letech velkého tempa růstu stejně jako HDP dalších zemí, které přistoupily do EU společně s ČR, zatímco hospodářská výkonnost „staré Evropy“, kterou v modelech HDP EU reprezentuje, je na nízké úrovni a výrazné zlepšení nelze nejspíš v blízké době očekávat vzhledem k antiinflační politice Evropské centrální banky. Je tedy spíše vhodné zkoumat vliv jiných veličin na HDP ČR.

Co se týče znaménka směnného kurzu, obě možnosti by byly v souladu s teorií. Kladné znaménko značí, že depreciace kurzu má pozitivní dopad na HDP ČR. Slabá měna posiluje export, tím že zlevňuje vývozy a současně oslabuje import tím, že zdražuje dovozy. Výpadek v dovozech je tak nahrazen substituty domácího trhu, což se opět pozitivně projeví v HDP. Podle odhadnutých modelů převažuje tento vliv depreciace kurzu nad druhým efektem, kdy ČNB v důsledku protiinflačních opatření a ochrany kurzu koruny zvedne úrokové sazby a

to za předpokladu ceteris paribus sníží investice a tím zpomalí růst HDP. Ke stejným závěrům ohledně vlivu depreciace na HDP dospěli také Hušek a Švarcová (2007), zatímco v modelu, který použil Hsing (2004) s kurzem CZK/USD, převážil druhý efekt.

Vliv deficitu na HDP ČR vyšel v odhadnutých modelech ve shodě s ekonomickou teorií. Tedy nárůst deficitu veřejných financí podporuje tempo růstu HDP. V odhadnutých modelech vyšlo sice znaménko u deficitu záporné, to je ale způsobeno tím, že se v modelu nepracuje s deficitem v absolutních hodnotách, ale se zápornými čísly. Z pohledu fiskální politiky je tedy na základě odhadnutých modelů možné tvrdit, že vyšší deficit má pozitivní vliv na HDP ČR, bez ohledu na to, zda je způsoben růstem vládních výdajů na nákup statků a služeb či snižováním daní. Do budoucna je však třeba uvažovat v širším kontextu. Bude-li ČR pokračovat se současnými deficity, nebude plnit maastrichtská kritéria a tato situace pak zcela jistě na ekonomiku příznivý vliv mít nebude.

Ve shodě s ekonomickou teorií bylo také znaménko inflace ČR. V IS-MP-IA modelu vyšší inflace působí na centrální banku, aby zvýšila reálnou úrokovou míru. Vyšší reálná úroková míra pak snižuje produkt. Odhadnuté GARCH modely tuto skutečnost podpořily.

Naopak v rozporu s ekonomickou teorií vychází ve všech odhadnutých GARCH modelech znaménko u inflace EU. Inflace EU byla do modelu zahrnuta kvůli maastrichtským kritériím, které jsou pro ČR závazné, proto se mi zdá vhodné vysvětlit tento „rozpor“ Ballasovým-Samuelsonovým teorémem.

Tento koncept staví na skutečnosti, že v důsledku ekonomické integrace dochází v sektoru mezinárodně obchodovatelného zboží k růstu produktivity práce, která se promítá do rychlého růstu mezd. V dlouhém období se projeví tendence k stejnoměrnému růstu mezd ve všech sektorech ekonomiky. V sektoru mezinárodně neobchodovatelného zboží se však rozpor mezi pomalým růstem produktivity práce a rychlým růstem mezd projeví v růstu cen a vzniká tlak na růst inflace (Mandel, Tomšík 2007).

Tento Balassův-Samuelsonův efekt je jednou z nejsilnějších námitek proti současné podobě maastrichtských kritérií. Při flexibilním kurzu se efekt rozkládá do nominálního zhodnocení měny a růstu cenové hladiny. Obecně platí, že Ballasův-Samuelsonův efekt je tím vyšší, čím větší je růst produktivity práce a čím více roste poptávka po službách v ekonomice s rostoucí životní úrovní. Odhady tohoto efektu se pohybují v rozmezí 1,5 – 4 %.

Dlouhodobým inflačním cílem Evropské centrální banky je udržení inflace pod 2 %. Pro kandidátské země usilující o vstup do Evropské měnové unie z toho vyplývá v důsledku plnění maastrichtských kritérií závazek dosahovat inflace pod úrovní 3,5 %. To však znamená, že pouze Ballasův-Samuelsonův efekt značně komplikuje většině kandidátských zemí splnění inflačního kritéria pro vstup do EMU. Inflační diferenciál tranzitivních ekonomik vůči zemím EMU zvyšují také probíhající či dokončené strukturální reformy, např. deregulace cen, růst zdanění spotřeby, apod. Striktní dodržování inflačního kritéria by tak vyžadovalo restriktivní měnovou politiku, která by zpomalovala hospodářský růst (Mandel, Tomšík, 2007). Z tohoto pohledu by tedy rostoucí míra inflace v EU mohla mít pozitivní vliv na HDP ČR, protože otevírá větší prostor pro provádění měnové i fiskální politiky.

Komplikovanější je to se znaménkem zahraniční úrokové míry, které také neodpovídá teorii. Rostoucí úroková míra omezuje investice a brzdí hospodářský růst. V odhadnutých GARCH modelech však vychází pozitivní vztah mezi úrokovou mírou a HDP ČR.

Rostoucí úroková míra v EU vede k růstu úrokové míry v ČR. Rostoucí úroková míra v ČR, resp. měnová restrikce, by pak podle odhadnutých modelů měla mít pozitivní dopad na HDP. Tento efekt je ale v rozporu s teorií. Vlivem obětovaného podílu při provádění měnové restrikce se zabývali již Hušek a Formánek (2005). Pro odhad nákladů dizinflační politiky byl

použit koeficient míry obětování, který byl definován jako kumulativní ztráta produktu. Na základě teorie by tento koeficient měl nabývat kladných hodnot.

Studie však ukázala, že v případě České republiky nabývá tento koeficient pro období 1.čtvrtletí 1994 do 2. čtvrtletí 2002 sice nízkých, ale záporných hodnot. ČR není jedinou zemí, kde tento koeficient nevycházel v souladu s teorií. Podobné problémy se vyskytly např. u odhadů týkajících se ekonomiky Norska a Švédska a v některých případech Nizozemí a Velké Británie. Závěrem studie tedy je, že prováděná monetární restrikce nemá dlouhodobě významný negativní dopad na produkt ČR (Hušek, Formánek, 2005). Autoři článku uvádějí, že negativní hodnota koeficientu míry obětování je důsledkem tranzitivního charakteru české ekonomiky v uplynulém období a očekávají, že v horizontu pěti až deseti let by se výsledky odhadovaných modelů měly zlepšit a být v souladu s ekonomickou teorií.

S ohledem na provedenou studii je možné vysvětlit pozitivní vztah mezi úrokovou mírou EU a HDP ČR, který je popsán odhadnutými GARCH modely, jako důsledek tranzitivního charakteru české ekonomiky v letech, na kterých byly modely konstruovány. V posledních letech navíc nedocházelo k velkým změnám v úrokových sazbách. Evropská centrální banka zvýšila úrokové sazby po dvou letech až v prosinci 2006, takže tato změna není v modelech zachycena. ECB zvýšila úrokovou sazbu s cílem nejen snížit inflaci a přiblížit se tak dosažení dlouhodobého inflačního cíle, ale i podpořit hospodářský růst a zaměstnanost (např. Euractiv, 2005).

7 ZÁVĚR

Lze konstatovat, že spočtené předpovědi byly robustní při různých variantách GARCH (p,q) modelu. Osvědčilo se také zavedení exponenciálního trendu do modelů, které podstatným způsobem zlepšilo předpovědi. Odhadnuté parametry modelů vycházely většinou v souladu s ekonomickou teorií, možné příčiny některých rozporů byly vysvětleny.

Potvrdilo se, že vývoj ekonomiky České republiky je závislý na vývoji Evropské unie a že se ČR přizpůsobovala vstupu do EU postupně již před rokem 2004, takže vstup pro ni nepředstavoval významný šok.

Užití GARCH metodologie se ukazuje jako vhodné pro modelování ekonomiky ČR.

Použitá literatura

1. Arlt, J. – Arltová M.: Ekonomické časové řady. Grada, Praha 2007.
2. Bollerslev, T.: Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Journal of Econometrics, 1986, Vol. 31, s. 307–327.
3. Engle, R.: GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics. Journal of Economic Perspectives, 2001, Vol. 15, No. 4, s. 157-168.
4. EurActiv: Úroková míra v eurozóně koncem roku vzroste; 22.11.2005; dostupné z [www: \[http://www.euractiv.cz/ekonomika-a-euro\]](http://www.euractiv.cz/ekonomika-a-euro)
5. Hušek, R. – Formánek, T.: Estimation of the Czech Republic sacrifice ratio for the transition period. Prague Economic Papers, 2005, No. 1, s. 51–63.
6. Hušek, R. – Švarcová, R.: Modifikace IS-MP-IA modelu pro českou ekonomiku. Acta Oeconomica Pragensia. 2007, roč. 15, č. 1, s. 20–26.
7. Hsing, Y.: MP-IA Model. Prague Economic Papers, 2004, č. 4, s. 339–345.
8. Mandel, M. – Tomšík, V.: Monetární ekonomie v malé otevřené ekonomice. Management Press, Praha 2003.
9. Plchová, B: Dopady změn v zahraničně obchodní politice na českou ekonomiku po našem vstupu do EU. Acta Oeconomica Pragensia, 2004, roč. 12, č. 3, s. 124-142.

10. Romer, D.: Keynesian Macroeconomics without the LM Curve. *Journal of Economic Perspectives*, 2000, Vol. 14, No. 2, s. 149–169.
11. Švarcová, R.: Perspektiva zbožových toků na krátkodobé období (vektorový autoregresní model). In: *Současná Evropa a ČR*. Praha, CES VŠE v Praze, 2004, s. 167–179.
12. Švarcová, R.: Perspektiva zbožových toků mezi ČR a EU. In: *Sborník prací semináře doktorského studia Fakulty informatiky a statistiky Vysoké školy ekonomické v Praze*, 2005, s. 234–244.

Kontaktní údaje

Ing. Adéla Ráčková

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420) 22409 5445

email: adela.rackova@vse.cz

EKONOMETRICKÉ PROGNOZOVANIE VÝVOJA MIEZD VO VYBRANÝCH KRAJINÁCH EÚ

ECONOMETRIC FORECASTING OF WAGES IN SELECTED COUNTRIES EU

Kvetoslava Surmanová

Abstrakt

Článok sa zaoberá vzťahom „mzdy - ekonomický rast“ v 10 vybraných krajinách Európskej únie (EÚ). Cieľom je prostredníctvom ekonometrických modelov naprognózovať vývoj minimálnej mzdy na najbližšie obdobie. Na analýzu boli použité metódy panelových dát, pretože ponúkajú niekoľko výhod, okrem iného i zohľadnenie prierezných vplyvov, ktoré sú špecifické pre každú zo skúmaných krajín.

Kľúčové slová: minimálna mzda, miera rastu HDP, HICP, panelové dáta, prognóza

Abstract

This paper presents and illustrates the model approach to the analysis of relation “wages – economic growth”. We are using the methods of the panel data, because they offer several important advantages, e.g. implementation of fixed effects. The 10 EU member countries pooled in panel was analyzed. The aim of the paper is forecast values of the wages.

Key words: minimal wages, growth rate of GDP, HICP, panel data, forecasting

1 ÚVOD

V predchádzajúcich analýzach sme sa zaoberali otázkou, či zavedenie Eura bude mať podstatný vplyv na výšku miezd vo vybraných 10 krajinách EÚ. Keďže je z predošlého vývoja v krajinách, ktoré už zaviedli jednotnú menu dokázateľné, že v období po prijatí Eura dochádzalo k nárastu cenovej hladiny, analýza bola zrealizovaná nepriamo (vplyv HICP na mzdy) pomocou ekonometrických modelov, kde bola závislou premennou mzda a nezávislou premennou harmonizovaný index spotrebiteľských cien, prípadne ďalšie makroveličiny. Zrejme z dôvodu nízkeho inflačného prostredia vo všetkých desiatich analyzovaných krajinách Európskej únie (výnimkou je len Litva, kde harmonizovaný index spotrebiteľských cien (priemerná medziročná miera zmeny) v ostatných rokoch 2004-2006 nadobúdal hodnoty 6,2; 6,9 a 6,6 %) sa preukázalo, že väčší vplyv na ďalší vývoj miezd má vývoj produktivity práce a výška hrubých domácich výdavkov na výskum a vývoj. Stanoviť, čo determinuje vývoj miezd je problematické. Pre krajiny Európskej únie nie sú stanovené žiadne spoločné pravidlá, ktoré by boli smerodajné pri stanovovaní výšky minimálnej mzdy. Vo viacerých krajinách je rast miezd ovplyvňovaný mierou inflácie. Napr. na Slovensku a v Čechách je jej výška závislá od rozhodnutia vlády. Predpokladáme, že v reálnej ekonomike by výšku miezd do značnej miery určoval ekonomický rast a s ním spojená produktivita práce. Je to tak i v 10 vybraných krajinách EÚ?

2 METODOLÓGIA

Pri tvorbe modelov sme vychádzali z elementárneho modelu panelových dát

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{1it} + \beta_2 x_{2it} + u_{it}, \quad (1)$$

kde

y_{it} je závislá premenná pre i -tu prierezovú jednotku v čase t ,

x_{it} je nezávislá premenná pre i -tu prierezovú jednotku v čase t ,

β_0 je úrovňová konštanta,

β_1, β_2 sú parametre modelu,

u_{it} je náhodná zložka pre i -tu prierezovú jednotku v čase t .

Pre zachytenie diferencií, ktoré sú prítomné v analyzovaných krajinách, sme uvažovali s modelom s fixnými prierezovými vplyvmi. Jeho tvar je nasledovný

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{1it} + \beta_2 x_{2it} + u_{it}, \quad (2)$$

pričom β_i je úrovňová konštanta rozdielna pre každú prierezovú jednotku. Rovnako je možné uvažovať v modeli s prítomnými náhodnými prierezovými vplyvmi.

3 MODEL VÝVOJA MINIMÁLNEJ MZDY

Ako východisko bol zvolený model, v ktorom sme skúmali vplyv miery rastu HDP na minimálnu mzdu

$$M1: mzda_{it} = \beta_0 + \beta_1 \cdot rhdp_{it} + u_{it}, \quad (3)$$

kde $mzda_{it}$ je minimálna mzda (Eur/obyvateľa),

$rhdp_{it}$ je miera rastu HDP (%).

Na získanie informácií o budúcom vývoji miezd sme zostrojili viacero variant jednorovnicového ekonometrického modelu. Uvedený model bol postupne doplnený o ďalšie nezávislé premenné, t.j. produktivitu práce (pp_t), harmonizovaný index spotrebiteľských cien ($hicp_t$), inflačné očakávania ($hicp_{t+1}$) a trendovú zložku (T), ktorá sa tiež preukázala ako významná.

Výsledkom sú ďalšie jednorovnicové lineárne ekonometrické modely

$$M2: mzda_{it} = \beta_0 + \beta_1 \cdot rhdp_{it} + \beta_2 \cdot pp_{it} + u_{it}, \quad (4)$$

$$M3: mzda_{it} = \beta_0 + \beta_1 \cdot rhdp_{it} + \beta_2 \cdot pp_{it-1} + u_{it}, \quad (5)$$

$$M4: mzda_{it} = \beta_0 + \beta_1 \cdot rhdp_{it} + \beta_2 \cdot pp_{it} + \beta_3 \cdot T + u_{it}, \quad (6)$$

$$M5: mzda_{it} = \beta_0 + \beta_1 \cdot rhdp_{it} + \beta_2 \cdot hicp_{it-1} + u_{it}, \quad (7)$$

$$M6: mzda_{it} = \beta_0 + \beta_1 \cdot rhdp_{it} + \beta_2 \cdot pp_{it} + \beta_3 \cdot hicp_{t+1} + u_{it}, \quad (8)$$

$$M7: mzda_{it} = \beta_0 + \beta_1 \cdot hicp_{it-1} + \beta_2 \cdot T + u_{it}. \quad (9)$$

Všetky modely boli aplikované na údajovej základni panelových dát založených na ročnej báze zo zdrojov Eurostatu za obdobie rokov 1995 – 2006. Do panelu dát boli združené údaje za 10 členských krajín Európskej únie. Česká republika (CZ), Estónsko (EE), Cyprus (CY), Litva (LV), Lotyšsko (LT), Maďarsko (HU), Malta (MT), Poľsko (PL), Slovinsko (SI) a Slovensko (SK), t.j. krajiny, ktoré sa stali členskými štátmi EÚ 1.4.2004.

Odhad parametrov bol uskutočnený pomocou ekonometrického programu Eviews 5.1, metódou najmenších štvorcov bez prítomnosti špecifických vplyvov (1). Následne bol na každej verzii načrtnutého modelu zrealizovaný odhad so začlenenými fixnými prierezovými vplyvmi (2) i s náhodnými prierezovými vplyvmi. Na základe Hausmanovho testu bol odhad parametrov v modeloch s fixnými prierezovými vplyvmi vo všetkých experimentoch vyhodnotený za vhodnejší.

V analýzach založených na prierezočných údajoch je možný výskyt heteroskedasticity (náhodná zložka môže mať pre každé pozorovanie rozdielny rozptyl). Eviews poskytuje namiesto štandardnej metódy najmenších štvorcov možnosť použiť Whiteov kovariančný odhad. V tomto prípade Whiteova kovariančná matica predpokladá, že reziduály odhadnutej rovnice sú sériovo nekorelované.

Pri hodnotení modelov sme sa zamerali na štatistickú a ekonomickú signifikantnosť. Pri stanovení prognózy na obdobie rokov 2007-2010 sme na prognózovanie nezávislých premenných využili model trendu.

4 VÝSLEDKY

V prvej tabuľke sú obsiahnuté hodnoty prognóz minimálnej mzdy pre Slovensko, ktoré boli získané využitím vyššie uvedených siedmich modelov.

Tabuľka 1 Prognóza minimálnej mzdy - Slovensko

SK	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
2007	2 647	2 651	2 600	2 637	2 615	2 680	2 583
2008	2 834	2 839	2 815	2 823	2 796	2 868	2 796
2009	3 020	3 026	2 999	3 008	2 987	3 056	2 999
2010	3 207	3 214	3 184	3 193	3 187		3 202

Zdroj: vlastný výpočet

Budúci vývoj minimálnej mzdy na Slovensku by sme na základe vytvorených modelov mohli vyhodnotiť nasledovne. Najrýchlejší rast minimálnej mzdy je zaznamenaný prostredníctvom modelu M6. V porovnaní s hodnotou roka 2006 (2.400,- Eur) zvýšenie v roku 2007 tvorí 11,7 %, v roku 2008 19,5% a v roku 2009 27,3 %. Najmenšia zmena by nastala v prípade, ak by bola minimálna mzda determinovaná len mierou inflácie z predchádzajúceho obdobia (model M7). V tomto prípade by bol v roku 2007 nárast len o 7,6 % v porovnaní s rokom 2006, v roku 2008 o 16,5 %, v roku 2009 o 24,9 %. Z uvedeného vyplýva, že rozdiely v prognózovaných hodnotách nie sú veľké.

Keďže poznáme hodnotu minimálnej mzdy na Slovensku za rok 2007¹, môžeme uvedené modely verifikovať. Cez priemerný výmenný kurz Eur v Sk sme vyčíslili minimálnu mzdu v roku 2007 na 2.744,-Eur². Táto hodnota je porovnateľná s našimi získanými údajmi. Z našich modelov je najbližšie k hodnote 2.744,-Eur model M6, t.j. model s najväčším rastom. Metodika údajov na základe ktorých bola analýza zrealizovaná neberie do úvahy zmenu minimálnej mzdy, ktorá nastáva na Slovensku vždy k 1.októbru daného roka. Ak by sme rovnako postupovali pri výpočte minimálnej mzdy na rok 2007 a rok 2008, hodnoty by boli nasledovné: 2.670,-Eur³ (rok 2007) a 2.898,- Eur⁴ (rok 2008⁵). Ale i tomto prípade sa ukazuje model M6 (vývoj miezd determinuje miera rastu HDP a produktivita práce a inflačné očakávania) ako najvhodnejší na prognózovanie ďalšieho vývoja na najbližšie roky.

¹ Minimálna mzda na Slovensku od 1.10.2006 bola 7.600,-Sk a od 1.10.2007 vo výške 8.100,-Sk.

² $((7.600 \times 9 \text{ mesiacov}) + (8.100 \times 3 \text{ mesiace})) / 33,781 = 2.744 \text{ Eur}$.

³ $(7.600 \times 12) / 33,781 = 2.670 \text{ Eur}$.

⁴ $(8.100 \times 12) / 33,538 = 2.898 \text{ Eur}$.

⁵ Pri výpočte minimálnej mzdy v Eurách bol použitý priemerný kurz za január 2008.

V prípade Českej republiky bol najrýchlejší rast zachytený pomocou modelu M7, kde ako vysvetľujúca premenná vystupuje HICP z minulého obdobia a trendová zložka. Predikované hodnoty minimálnej mzdy Českej republiky sú obsiahnuté v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 2 Prognóza minimálnej mzdy – Česká republika

CZ	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
2007	3 456	3 469	3 468	3 457	3 452	3 460	3 471
2008	3 643	3 657	3 635	3 642	3 646	3 648	3 659
2009	3 829	3 844	3 819	3 828	3 837	3 835	3 862
2010	4 016	4 032	4 004	4 013	4 037		4 065

Zdroj: vlastný výpočet

V tomto prípade môžeme tiež porovnať predpovede so skutočnosťou pre rok 2007. Minimálna mesačná mzda v Českej republike od 1.1.2007 je 8.000,-CZK, čo je v prepočte cez priemerný kurz (27,762 CZK/EUR) 3.458,-Eur⁶. Táto hodnota je približne rovnaká s prognózou získanou na základe modelu M4 (rozdiel 1 Euro) a M1 (rozdiel 2 Eura). V oboch modeloch vývoj mzdy determinuje tempo rastu HDP. Model M4 je navyše doplnený o produktivitu práce a trendovú zložku.

Na základe uvedeného môžeme vyvodit' záver, že na Slovensku i v Českej republike je výška minimálnej mzdy ovplyvňovaná prevažne ekonomickým rastom a miera inflácie nezohráva dominantnú úlohu.

Pre úplnosť uvádzame prognózy pre ďalšie analyzované krajiny. Vývoj minimálnej mzdy na obdobie rokov 2007 – 2010 je podobný ako v Čechách a na Slovensku. Na základe nami zostrojených modelov by mala mať minimálna mzda naďalej rastúcu tendenciu. Výnimkou sú len Cyprus a Estónsko.

Tabuľka 3 Prognóza minimálnej mzdy - Poľsko

PL	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
2007	2 843	2 848	2 876	2 830	2 832	2 859	2 779
2008	3 029	3 036	3 023	3 015	3 030	3 047	3 034
2009	3 216	3 223	3 207	3 201	3 221	3 234	3 237
2010	3 403	3 410	3 392	3 386	3 421		3 440

Zdroj: vlastný výpočet

Tabuľka 4 Prognóza minimálnej mzdy - Maďarsko

HU	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
2007	3 205	3 215	3 197	3 201	3 197	3 213	3 176
2008	3 392	3 403	3 380	3 386	3 387	3 401	3 431
2009	3 579	3 590	3 564	3 571	3 571	3 588	3 634
2010	3 765	3 778	3 749	3 757	3 771		3 837

Zdroj: vlastný výpočet

⁶ (8000 x 12)/27,762 = 3.458 Eur

Tabuľka 5 Prognóza minimálnej mzdy - Cyprus

CY	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
2007	6 914	6 918	7 012	6 904	6 979	6 922	7 200
2008	7 100	7 106	7 106	7 089	7 172	7 110	7 367
2009	7 287	7 293	7 291	7 274	7 363	7 297	7 570
2010	7 474	7 480	7 475	7 460	7 563		7 774

*Zdroj: vlastný výpočet***Tabuľka 6 Prognóza minimálnej mzdy - Estónsko**

EE	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
2007	3 030	3 035	2 849	3 021	3 027	3 034	3 148
2008	3 217	3 222	3 180	3 206	3 208	3 221	3 312
2009	3 404	3 410	3 364	3 391	3 399	3 409	3 515
2010	3 590	3 597	3 549	3 576	3 599		3 718

*Zdroj: vlastný výpočet***Tabuľka 7 Prognóza minimálnej mzdy - Litva**

LV	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
2007	2 472	2 476	2 410	2 462	2 504	2 470	2 584
2008	2 659	2 664	2 640	2 648	2 687	2 658	2 696
2009	2 845	2 851	2 824	2 833	2 871	2 845	2 899
2010	3 032	3 039	3 009	3 018	3 064		3 102

*Zdroj: vlastný výpočet***Tabuľka 8 Prognóza minimálnej mzdy - Lotyšsko**

LT	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
2007	2 439	2 443	2 362	2 429	2 453	2 443	2 526
2008	2 625	2 631	2 603	2 614	2 637	2 631	2 660
2009	2 812	2 818	2 788	2 799	2 828	2 819	2 863
2010	2 999	3 005	2 972	2 985	3 028		3 066

*Zdroj: vlastný výpočet***Tabuľka 9 Prognóza minimálnej mzdy - Malta**

MT	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
2007	5 322	5 413	5 593	5 409	5 408	5 452	5 484
2008	5 509	5 601	5 644	5 595	5 599	5 640	5 646
2009	5 695	5 788	5 828	5 780	5 790	5 828	5 849
2010	5 882	5 976	6 013	5 965	5 990		6 052

*Zdroj: vlastný výpočet***Tabuľka 10 Prognóza minimálnej mzdy - Slovinsko**

SI	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
2007	6 190	6 199	6 180	6 186	6 243	6 215	6 301
2008	6 377	6 386	6 376	6 372	6 434	6 403	6 536

2009	6 563	6 574	6 561	6 557	6 625	6 591	6 739
2010	6 750	6 761	6 745	6 742	6 825		6 943

Zdroj: vlastný výpočet

Na základe údajov minimálnej mzdy pre roky 2007 uverejnených na web stránkach Federation of European Employers a Eurostatu je tiež možné všetky uvedené modely čiastočne verifikovať.

Tabuľka 11 **Ročné údaje minimálnej mzdy v 8 krajinách EÚ⁷**

	PL	HU	CY	EE	LV	LT	MT	SI
2007 ⁸	2 952	3 096	-	2 760	2 064	2 088	7 020	6 264
2008 ⁹	3 737	3 252	8 892	3 336	2 732	2 436	7 405	6 456

Výsledky prognózy sú pre Poľskú republiku, Cyprus a Maltu značne podhodnotené. V prípade Maďarska, Litvy a Lotyšska sú získané prognózy na základe uvažovaných modelov nadhodnotené. Menšia diferenciacia bola dosiahnutá len v prípade Litvy, v roku 2008. Prognóza mzdy v modeli M7 (2 696,-Eur) je blízka skutočnej mzde, 2 732,-Eur. Porovnaním hodnôt v Estónsku, by sme mohli skonštatovať, že k skutočnosti sa najviac približuje model M7, kde ako determinant vystupuje harmonizovaný index spotrebiteľských cien. Vývoj minimálnej mzdy v Slovinsku sa vyvíja podobne ako v odhadnutom modeli M5, v ktorom sa ako významné preukázali tempo rastu HDP a HICP z predchádzajúceho obdobia.

5 ZÁVER

Na základe zrealizovaných experimentov môžeme skonštatovať, že i analýza viacerých krajín cez model panelových dát má určite nepopierateľný význam. Je veľmi ťažké vytvoriť model, v ktorom by boli obsiahnuté špecifiká zlúčených krajín do panelu dát. V našom prípade sa podarilo vytvoriť niekoľko modelov, na základe ktorých bolo možné zostaviť prognózu na najbližšie obdobie 4 rokov. Verifikáciou sme vyhodnotili prognózu pre každú z analyzovaných krajín. Keďže každá krajina pôsobí ako samostatná ekonomická jednotka, je i ekonomický systém vo všetkých krajinách odlišný, založený na rôznych faktoroch. Práve preto sa verifikáciou nepreukázal ako najlepší len 1 z prezentovaných modelov pre všetky krajiny, ale pre každú z krajín by bolo vhodnejšie rešpektovať jej špecifiká, determinanty vývoja miezd. Podobnú analýzu je možné uskutočniť pre každú z krajín samostatne a výsledky navzájom porovnať.

Použitá literatúra

1. Lukáčiková A., Szomolányi, K., Lukáčik, M. 2005. Modelovanie vývoja miezd. In: Manažment v teórii a praxi, č. 2, str. 66 – 76, ISSN 1336-7137.
2. Vladová, A. 2006. Krátkodobé modelovanie mzdového vývoja. In: BIATEC, ročník 14, č. 4, str. 10-14.
3. <http://www.mpsv.cz/cs/871>, platný k 25.1.2008.
4. www.statistics.sk.
5. europa.eu.int/comm.

⁷ údaje platné k 1.1. príslušného roka v Eurách.

⁸ http://epp.eurostat.ec.europa.eu/cache/ITY_OFFPUB/KS-SF-07-071/EN/KS-SF-07-071-EN.PDF, platný k 5.2.2008

⁹ <http://www.fedee.com/minwage.html>, platný k 5.2.2008

6. [http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/cr:_makroekonomicke_udaje/\\$File/92581719.xls](http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/cr:_makroekonomicke_udaje/$File/92581719.xls), platný k 25.1.2008.
7. <http://www.fedee.com/minwage.html>, platný k 5.2.2008.
8. http://epp.eurostat.ec.europa.eu/cache/ITY_OFFPUB/KS-SF-07-071/EN/KS-SF-07-071-EN.PDF , platný k 5.2.2008.

Kontaktné údaje

Ing. Kvetoslava Surmanová, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 672 95 823

Email: surman@euba.sk

POROVNANIE VÝNOSU A RIZIKA GARANTOVANÝCH STRATÉGIÍ

RETURN AND RISK COMPARISON OF GUARANTEED STRATEGIES

Branislav Tuš

Abstrakt

Garantované fondy sa stali v poslednom období veľmi populárnymi. V tomto dokumente sú porovnávané výhody a nevýhody rôznych druhov garantovaných stratégií z pohľadu rizika a výnosu. Medzi najznámejšie patrí CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance) stratégia. Dokument porovnáva stratégiu CPPI so stratégiami, ktoré pôvodnú metódu CPPI modifikujú. Analýza ukazuje, že voľba parametrov metódy má významný vplyv na výkonnosť a celkovú hodnotu portfólia garantovanej stratégie.

Kľúčové slová: CPPI, Value at Risk, Garantované stratégie, Výnos, Riziko.

Abstrakt

In recent years guaranteed funds has become very popular. In this article the advantages and disadvantages of various types of guaranteed strategies in terms of return risk perspective are compared. Among the most popular there is a CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance) strategy. In this article the CPPI strategy is compared with ones that modify the CPPI. According to our historical simulation the choice of parameters of guaranteed strategy plays an important role and has a big impact on a total performance of the strategy.

Kľúčové slová: CPPI, Value at Risk, Guaranteed strategies, Risk and Return

1 Úvod

V tomto článku sú analyzované garantované stratégie, ktoré umožňujú investovanie do rôznych typov investičných nástrojov (akcie, dlhopisy, komodity...) s cieľom zabezpečiť na definovanom horizonte stanovenú garantovanú hodnotu.

V nedávnej dobe boli garantované stratégie realizované najmä prostredníctvom kombinácie aktív s opciami. Táto metóda sa nazýva Option Based Portfolio Insurance (OBPI). Metóda garantuje vrátenie investovanej sumy a zároveň ponúka možnosť podieľať sa na raste podkladového aktíva, za predpokladu, že investor ponechá svoje finančné prostriedky investované počas až do doby splatnosti fondu¹. Pri stratégii je možné garantovať aj určitý minimálny výnos, avšak platí, že čím je vyšší požadovaný minimálny výnos, tým sa znižuje potenciál na dosiahnutie vyššieho výnosu stratégie. Garancia stratégie je realizovaná prostredníctvom put opcie s určenou splatnosťou. Alternatívnou je kombinácia bezrizikového aktíva s rizikovým tak, aby kopírovala put opciu na daný index. V tejto metóde je podiel rizika v stratégii v každom momente daný teóriou opcií.

Alternatívny prístup pozostáva z dvoch ideí

- stratégia je vždy udržiavaná nad určitou minimálnou hranicou nazývanou "floor", Rozdiel medzi floor a aktuálnou celkovou hodnotou stratégie predstavuje "vankúš", minimálna hranica floor rastie lineárne o vopred predefinovanú konštantu (napríklad o hodnotu bezrizikovej investície) tak, aby v momente maturity bola konečná hodnota portfólia minimálne vo výške garantovanej úrovne;
- váha rizikových investícií je funkciou vankúša. Pri stratégii CPPI ide zvyčajne o explicitne určený multiplikátor. Prvá idea je zameraná na garantovanie investície a druhá je na výkonnosť stratégie.

Výhodou tejto stratégie je jej likvidita (bez penalizačných poplatkov) a existencia garancie. Z pohľadu podielových fondov stratégie v kombinácii s put opciami sú vhodné najmä pre uzavreté podielové fondy. Naopak, stratégie založené na princípe CPPI sú vhodné pre otvorené podielové fondy.

2 Stratégia CPPI

Pri stratégii CPPI vznikajú dva aspekty. Jej schopnosť zabezpečiť garanciu a zároveň dosiahnuť požadovaný výnos.

Pri tejto stratégii je riziko nulové v prípade, že vankúš je taktiež blízky nule. Vtedy je portfólio investované 100 % v bezrizikovom aktíve. V takom prípade je garancia zaručená. Stratégia tak zaručuje, že hodnota portfólia nikdy neklesne pod garantovanú úroveň. V takom prípade však stratégia nezabezpečí žiadny výnos okrem samotnej garancie. Rebelancovanie portfólia medzi rizikovým a bezrizikovým aktívom prebieha v diskrétnych intervaloch takže existuje minimálne riziko nezabezpečenia minimálnej garantovanej hranice. Rizikom stratégie sú katastrofické udalosti, pri ktorých nie je možné splniť garanciu. Preto jeden z cieľov tejto stratégie je minimalizovať možnosť výskytu takej udalosti.

¹ Monika Sameřová, 2007, Guaranteed open-end mutual funds. 2007. diplomovka.sk (online). Dostupné na: <http://diplomovka.sk/zdroj/3132.pdf>

Z pohľadu výnosu cieľom stratégie je čo možno v najväčšej miere participovať na výnose rizikového aktíva. Výnos stratégie teda závisí predovšetkým od nastavenia minimálnej hranice floor a multiplikátora.

Pri predpoklade, že portfólio je rebalancované priebežne, minimálna hranica floor rastie lineárne o bezrizikovú úroveň a predpoklade a vývoj rizikových aktív sleduje normálne rozdelenie, možno ukázať, že metóda má možnosť voľby z pohľadu dosahovaného výnosu. Z pohľadu rozdelenia má takáto stratégia svoje rozdelenie "posunuté" v pravo avšak za cenu, že sa vzdáva možnosti dosiahnuť vysoké výnosy. Výhoda tejto metódy teda spočíva v nastavení multiplikátora. Čím vyšší je multiplikátor tým je stratégia vystavená väčšiemu trhovému riziku a teda môže dosahovať vyššie výnosy, ale aj väčšie straty. Stratégia teda umožňuje dosiahnuť vyššie výnosy, ale aj väčšie riziko.

2.1 Modifikácie CPPI

Stratégia CPPI má teda svoje limity. Z pohľadu výnosu potenciálnou nevýhodou metódy je zvyšujúca sa minimálna hranica floor, ktorá determinuje úroveň garancie. Ak rizikové aktíva zaznamenajú výrazný nárast minimálna hranica stráca zmysel v porovnaní s hodnotou portfólia. Logickým východiskom je vytvorenie tzv pohyblivej minimálnej hranice v závislosti od dynamiky vývoja hodnoty portfólia.

Cieľom tejto modifikácie je v prvom rade vyhnúť sa momentu, keď hodnota portfólia dosiahne hodnotu minimálnej hranice a teda celé portfólio je investované v bezrizikovom aktíve. Jednou z možností je prispôbenie minimálnej hranice a nejakú preddefinovanú úroveň smerom hore v prípade výraznejšieho nárastu hodnoty portfólia. Pri následnom poklese teda, keď hodnota portfólia dosiahne modifikovanú minimálnu hranicu existuje priestor pre ponechanie určitej časti rizikových aktív v portfóliu pri zachovaní základného pravidla metódy CPPI a to pomeru váh rizikových a bezrizikového aktíva. Napríklad hodnota minimálnej hranice môže byť dynamicky zvyšovaná v pomere násobku výnosu v porovnaní s pôvodnou minimálnou hranicou. V takomto prípade však nie je možné považovať rebalancovanie portfólia za priebežné (v prípade, že hodnota portfólia dosiahne modifikovanú minimálnu hranicu, je nutné urobiť výraznejšie zmeny v pomere medzi rizikovým a bezrizikovým aktívom, čím sa zvyšuje pravdepodobnosť nesplnenia pôvodnej garancie pri významných šokoch.

Druhou alternatívou je modifikácia multiplikátora ako funkcie rizikového parametra. Multiplikátor je pri základnej metóde nastavený explicitne.

Nie je všeobecne potvrdené, že modifikácia základnej metódy CPPI vedie k štatisticky významným lepším výsledkom .

2.2 Aplikácia metódy CPPI – konkrétna štúdia

Na základe teoretických východísk boli porovnávané nasledovné stratégie.

1. CPPI
2. CPPI – s dynamickým multiplikátorom – funkcia rizikového parametra
3. CPPI – s dynamickým multiplikátorom – funkcia rizikového parametra – pohyblivá minimálna hranica floor

4. naivné portfólio zložené z rizikových aktív

Cieľom analýzy je kvantifikovať výnos a riziko spomínaných stratégií a určiť dopady modifikácie metódy CPPI.

2.2.1 Matematický popis stratégie

Označme

V_t	hodnota portfólia v čase t
V_0	počiatočná hodnota investície
P_t	hodnota minimálnej hranice v čase t
$C_t = V_t - P_t$	vankúš v čase t
m	multiplikátor
E_t	investícia v rizikovom aktíve
T	splatnosť dlhopisu v rokoch
r	bezriziková úroková miera
S_t	hodnota rizikovej investície v čase t

Metóda CPPI je založená na priebežnom rebalancovaní portfólia medzi rizikovým a bezrizikovým aktívom takým spôsobom, aby hodnota portfólia bola vždy nad minimálnou hranicou floor a váha rizikovej investície je v každom momente funkciou vankúša, alebo rozdielom medzi minimálnou hranicou a aktuálnou hodnotou portfólia.

Vývoj hodnoty portfólia je popísaný prostredníctvom nasledujúcej stochastickej rovnice

$$dV_t = \frac{dS_t}{S_t} \times E_t + r d_t \times (V_t - E_t)$$

2.2.2 CPPI s fixnou minimálnou hranicou floor

V tomto prípade predpokladáme, že minimálna hranica sa nemení, resp. rastie lineárne o fixnú bezrizikovú úrokovú mieru r :

$$P_t = P_0 e^{rt}$$

$$P_0 \geq V_0 e^{-rt}$$

Predpokladáme, že cena rizikového aktíva sleduje štandardný model

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

kde W_t je štandardný Brownov pohyb a μ (výnos) a σ (štandardná odchýlka) sú nezáporné konštanty

2.2.3 Metóda CPPI

Pri obmedzení na krátke predaje rizikového aktíva

$$0 < E_t < p^* V_t$$

kde $p > 0$ potom:

$$E_t = \min\{mC_t, pV_t\}$$

a ďalej platí

$$dV_t = \left\{ \begin{array}{l} V_t \times rdt; V_t \leq p_t \\ (V_t - P_t) \times dZ_t + P_t \times rdt; P_t < V_t < \frac{m}{m-p} P_t \\ V_t \times dX_t; V_t \geq \frac{m}{m-p} P_t \end{array} \right\}$$

kde $DX_t = (p(\mu - r) + r) dt + p\sigma W_t$

2.2.2 CPPI s pohyblivou minimálnou hranicou floor

Metóda CPPI s fixnou minimálnou hranicou v prípade výrazného nárastu hodnoty portfólia stráca svoj význam

V takom prípade metóda nezaznamenáva rast hodnoty portfólia, ktoré je tak vysoko vystavené trhovému riziku počas rastúceho trendu, čo prináša riziko v prípade poklesov. Naopak v prípade že minimálna hranica je nastavená príliš „konzervatívne“, teda príliš nízko (blízko pôvodnej investície), portfólio je veľmi málo vystavené trhovému riziku a teda nie je možné očakávať vysoké výnosy. Riešením je modifikácia minimálnej hranice, ktorá bude závislá od výkonnosti portfólia. V prípade, že hodnota portfólia výrazne vzrastie, posunie sa aj minimálna hranica o vopred definovanú hranicu. Naopak následne ak dôjde k priblíženiu hodnoty portfólia k modifikovanej minimálnej hranici, tá sa späť nastaví k pôvodnej rastúcej o bezriziková úrokovú mieru). Teda ak

$$mC_t > pV_t:$$

potom:

$$P_t^{new} = \frac{m-p}{m} V_t$$

$$E_t^{NEW} = m(V_t - P_t^{new}) = pV_t$$

2.2.3 CPPI s dynamicky meniacim sa multiplikátorom

Pri metóde CPPI je nutné na začiatku explicitne zadať multiplikátor. V prípade že je multiplikátor nastavený príliš vysoko portfólio je vo väčšej miere vystavené trhovému riziku a dochádza k výrazným priebežným zmenám pomeru portfólia medzi rizikovým a bezrizikovým aktívom. Naopak ak je nastavený multiplikátor príliš nízko stratégia je len

veľmi málo vystavená trhovému riziku a nie je teda možné od stratégie očakávať vysoké výnosy.

Alternatívou je dynamická modifikácia multiplikátora ako funkcia rizikového parametra. Multiplikátor je nastavený v každom momente tak aby napríklad s určitou pravdepodobnosťou nemohlo na preddefinovanom horizonte dôjsť k nesplneniu garancie.

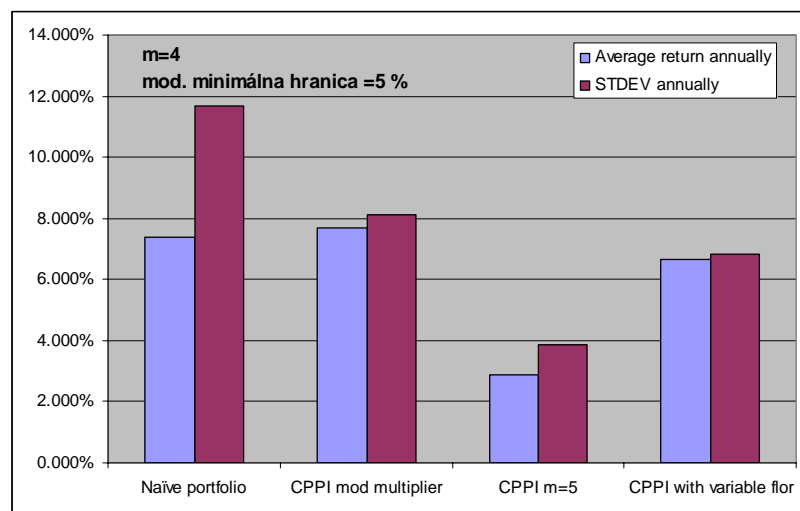
3 Porovnanie stratégií

Pri praktickej aplikácii porovnávame nasledovné stratégie

- 1 Naivné portfólio – rizikové a bezrizikové aktívum
- 2 CPPI – modifikácia multiplikátora ako funkcia rizikového parametra
- 3 CCPI
- 4 CPPI – modifikácia minimálnej hranice floor

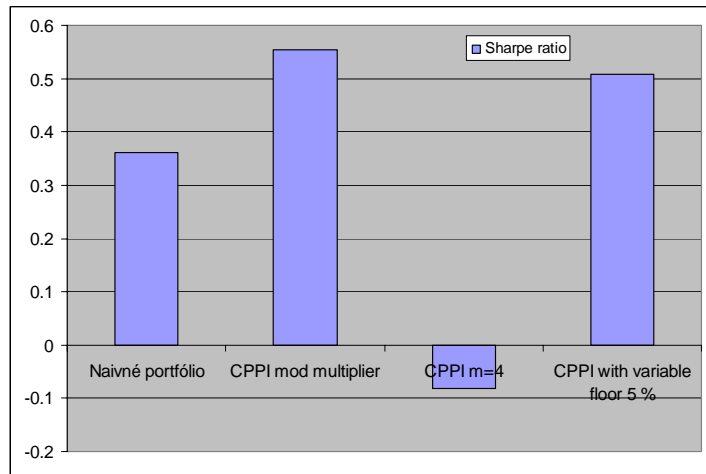
Na základe historických denných dát od roku 2000 boli vytvorené ceny rizikového aktíva a bezrizikovej investície. Rizikové aktívum je zložené z rovnakých váh indexov reprezentujúcich S&P 500, EUROSTOXX50, NIKKEI 225, Stredoeurópsky akciový index, Komoditný index EPRA, bezrizikovú investíciu reprezentuje 3 mesačná depozitná úroková sadzba v eurách. Ako horizont bol stanovený 6 mesačný interval. Ako garancia bola zvolená úroveň stratu 6 %. To znamená, že na mesačnom horizonte neprerobiť viac ako 6 %. Dôvodom akceptácie straty je zvolený krátky časový horizont.

Cieľom tejto štúdie je analyzovať ako sa prejavujú modifikácie metódy CPPI na výsledkoch (výnos, riziko). Naivné portfólio uvádzame ako alternatívu statickej stratégie typu „buy and hold“.



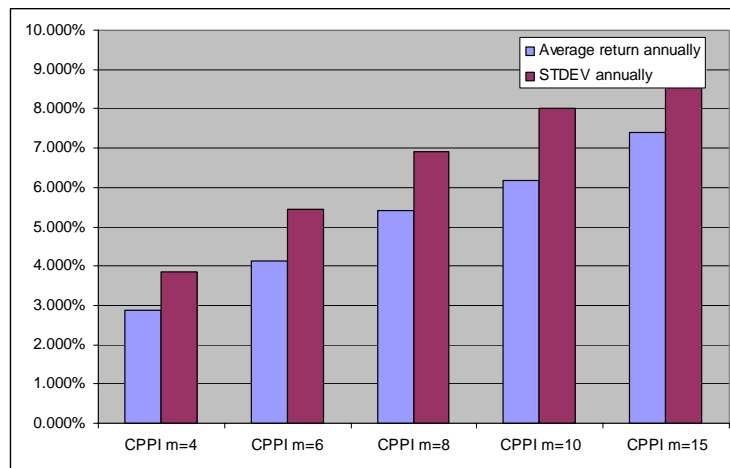
Graf č. 1 – Porovnanie výnosu a rizika vybraných stratégií

Z ilustrácii na grafe č.1 možno vidieť, že explicitne nastavený multiplikátor $m=5$ je príliš nízky na vygenerovanie vyšších výnosov.



Graf č.2 – Porovnanie stratégií prostredníctvom - Sharpe ratio

Pri porovnaní koeficientu Sharpe ratio (pozri graf.č.2), ktorý meria dodatočný výnos nad risk free rate voči štandardnej odchýlke vidíme, že typická stratégia CPPI nedosiahla ani úroveň bezrizikovej investície.

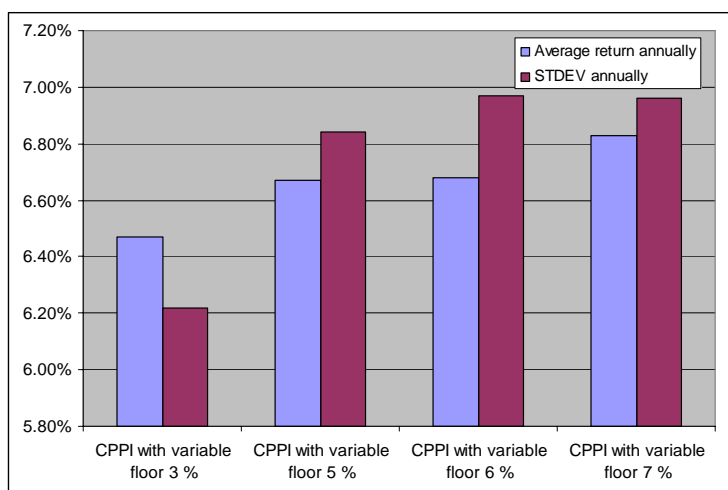


Graf č.3 – Zmena multiplikátora pri pôvodnej metóde CPPI a jej dopad na charakteristiky výnos, riziko

Na grafe č.3 sa menil multiplikátor m s cieľom dosiahnuť charakteristiky modifikovaných stratégií. Z grafu je zrejmé, že multiplikátor m pri modifikovaných stratégiách nadobúdal hodnoty nad 10, avšak aj v takomto prípade nie sú charakteristiky zhodné s modifikovanými stratégiami.

Stratégia pohyblivej minimálnej hranice ukazuje, že nemá na celkový performance (výnos, riziko) významný dodatočný vplyv. S častejším zvyšovaním minimálnej hranice klesá možný očakávaný výnos stratégie.

Naopak dynamicky meniaci sa multiplikátor mal na celkovú výkonnosť stratégie významnejší vplyv.



Graf č.4 – Zmena minimálnej hranice a jej dopad na charakteristiky výnos, riziko

Z tabuľky č.1 možno vidieť, že vplyv meniacej sa minimálnej hranice nemá významný vplyv na charakteristiky stratégie. Naopak zvolený nízky multiplikátor môže spôsobiť, že stratégia nedosiahne ani úroveň bezrizikovej investície.

Tabuľka č.1 porovnanie výnosu a rizika rôznych stratégií

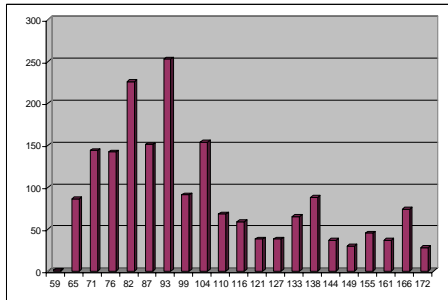
	Average return annually	STDEV annually	Sharpe ratio
Naivné portfólio	7.40%	11.70%	0.360
CPPI mod multiplier	7.67%	8.10%	0.553
CPPI m=4	2.87%	3.86%	-0.082
CPPI with variable floor 5 %	6.67%	6.84%	0.509
	Average return annually	STDEV annually	Sharpe ratio
CPPI m=4	2.87%	3.86%	-0.082
CPPI m=6	4.12%	5.45%	0.171
CPPI m=8	5.41%	6.91%	0.321
CPPI m=10	6.16%	8.01%	0.371
CPPI m=15	7.39%	9.20%	0.456
	Average return annually	STDEV annually	Sharpe ratio
CPPI with variable floor 3 %	6.47%	6.22%	0.527
CPPI with variable floor 5 %	6.67%	6.84%	0.509
CPPI with variable floor 6 %	6.68%	6.97%	0.501
CPPI with variable floor 7 %	6.83%	6.96%	0.523

Rizikový profil stratégií

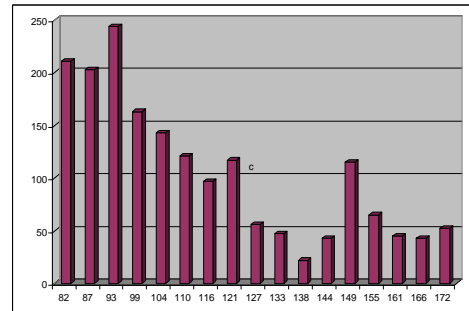
Dole uvedené grafy popisujú zmenu v distribúcii výnosov rôznych stratégií. Z grafov možno vidieť, že na rozdiel od naivného portfólia garantované stratégie majú distribuované hodnoty výraznejšie „vpravo“ (väčšie ako hodnota 100)

vybraných definovaných stratégií

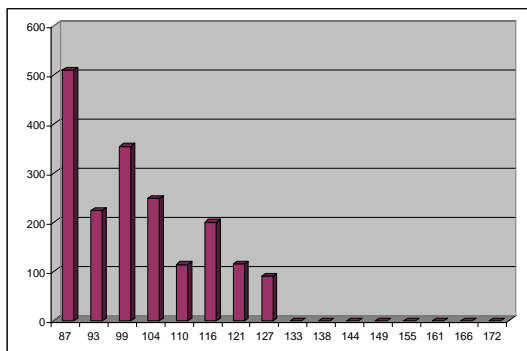
Histogram - Naivné portfólio



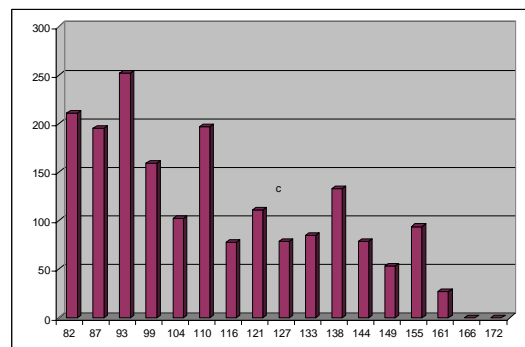
CPPI – s dynamickým multiplikátorom – funkcia rizikového parametra



Histogram – CPPI



CPPI – s dynamickým multiplikátorom – funkcia rizikového parametra – pohyblivá minimálna hranica floor



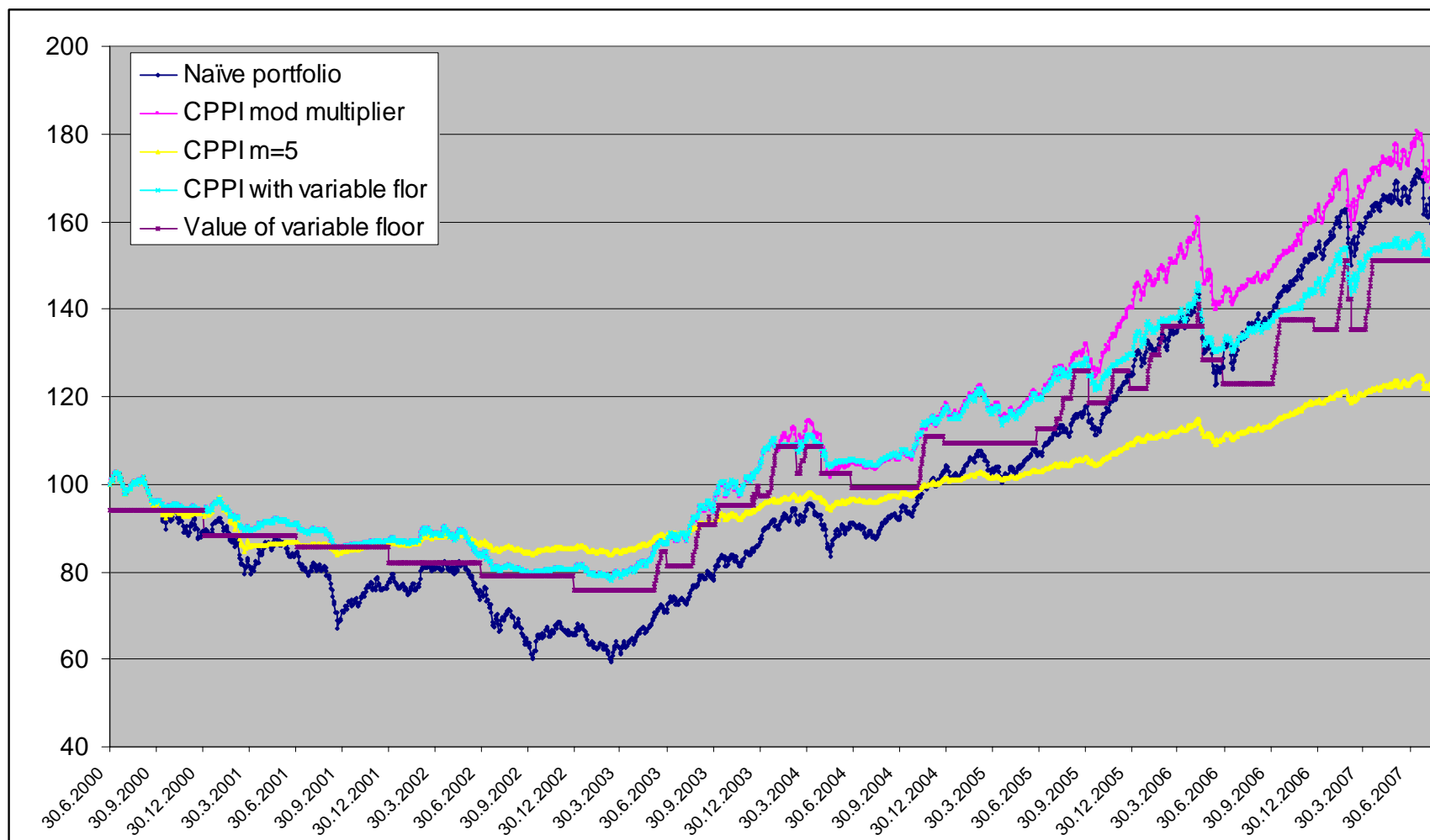
Záver

V príspevku boli prezentované historické simulácie vybraných stratégií, ktoré sú založené na metóde garancie portfólia - CPPI .

Cieľom bolo porovnať pôvodnú metódu CPPI s jej modifikovanými verziami a analyzovať ich dopady na celkový vývoj portfólia. Pri analýze nikdy nenastala skutočnosť, že stratégia nespĺnila svoj cieľ - minimálnu garantovanú hranicu. Dôvodom bol aj fakt, že v sledovanom období (1 deň) nenastala taká situácia, v ktorej by hodnota portfólia klesla pod minimálnu hranicu.

Z príspevku možno konštatovať, že modifikácia CPPI, či už prostredníctvom dynamickej zmeny multiplikátora alebo meniacej sa minimálnej hranice, môže byť dobrým smerom k dosiahnutiu lepších výsledkov v porovnaní s klasickou metódou CPPI. Akokoľvek, základné kritérium nastavenia zostáva naďalej otvorené, a teda vždy bude existovať „trade-off“ medzi modifikáciami stratégie a jej výkonnosťou.

Historická simulácia portfólií



Použitá literatúra

1. Boulier and Kanniganti, 2003, Expected performance and risk of various portfólio strategies. actuaries.org (online). 2003. Dostupné na:
http://www.actuaries.org/AFIR/colloquia/Brussels/Boulier_Kanniganti.pdf
2. Monika Sameľová, 2007, Guaranteed open-end mutual funds. 2007. diplomovka.sk (online). Dostupné na: <http://diplomovka.sk/zdroj/3132.pdf>

Kontaktné údaje

Ing. Branislav Tuš

Allianz-Slovenská dôchodková správcovská spoločnosť

Račianska 42, 831 02 Bratislava

Tel: +421 905 207 984

email: tusb@asdss.sk