Volatilita finančných časových radov a vybrané modely triedy ARCH

Michaela Chocholatá

Úvod

- finančné časové rady poskytujú informácie o vývoji cien na finančných trhoch, t.j. napríklad o vývoji cien akcií či vývoji cien rôznych mien
- špecifickou vlastnosťou týchto cien je, že na rozdiel od iných typov ekonomických časových radov, sú zaznamenávané s pomerne vysokou frekvenciou, napr. dennou
- pre finančné časové rady je typická nestacionarita, častejšie sú však predmetom analýz časové rady výnosov, ktoré sú už spravidla stacionárne a ich typickou črtou je v čase sa meniaca variabilita/volatilita
- pod pojmom volatilita zvyčajne rozumieme štandardnú odchýlku alebo rozptyl výnosov
- najjednoduchší model volatility – historický odhad

Úvod

- významný medzník v modelovaní volatility finančných časových radov – dynamický prístup – autoregresný podmienene heteroskedastický model ARCH (Engle (1982))
- podmienený rozptyl (volatilita) v modeli ARCH je funkciou štvorcov chýb z predchádzajúcich období, a teda umožňuje zachytiť tzv. zhlukovanie volatility (veľké cenové zmeny majú tendenciu vyvolávať ďalšie veľké cenové zmeny a malé cenové zmeny ďalšie malé cenové zmeny)
- Engle spolu s ďalším významným ekonometrom Grangerom v roku 2003 získali *Nobelovu cenu* za ekonómiu „*za metódy analýzy ekonomických časových radov s volatilitou meniacou sa v čase (ARCH)*“, resp. „*za metódy analýzy ekonomických časových radov so spoločnými trendmi (kointegrácia)*“

Obsah prezentácie

- súčasný stav problematiky
- modelovanie časových radov výnosov, pojem výnos, špecifikácia podmienenej strednej hodnoty a podmieneného rozptylu
- jednorozmerné modely triedy ARCH (lineárne, nelineárne), sezónne efekty, vzťah medzi volatilitou a obchodovaným množstvom
- viacrozmerné modely triedy ARCH

Súčasný stav problematiky

- tradičný prístup k analýze časových radov – dekompozícia na jednotlivé zložky (trendovú, sezónnu, cyklickú a náhodnú)
- novší prístup – Boxova-Jenkinsova metodológia ARIMA
  - základný prvok konštrukcie modelu časového radu: *náhodná zložka*, ktorá môže byť tvorená korelovanými (závislými) náhodnými veličinami
  - modely typu AR, MA, ARMA, I, ARIMA:

    podmienená stredná hodnota premenlivá v čase,

    podmienený rozptyl konštantný
- finančné časové rady výnosov – volatilita meniaca sa v čase, t.j. podmienený rozptyl nie je konštantný; typické je totiž striedanie turbulentných období s extrémnymi výkyvmi s pokojnými obdobiami

Súčasný stav problematiky

- typické vlastnosti finančných časových radov výnosov:

  -zhlukovanie volatility

  -porušenie predpokladu o normalite: vyššia špicatosť pravdepodobnostného rozdelenia finančných časových radov výnosov, „tlstejšie konce"

  -pákový efekt: asymetrická reakcia volatility na pozitívne a negatívne šoky rovnakej veľkosti

  -neobchodné dni: výnosy sa spravidla v dňoch nasledujúcich po neobchodných dňoch vyznačujú vyššou volatilitou

  -makroekonomické premenné a volatilita: makroekonomická neistota spôsobuje vyššiu volatilitu na trhu

  -zohľadnenie obchodovaného množstva pri modelovaní volatility v niektorých prípadoch vedie k poklesu zotrvačnosti vo volatilite

Súčasný stav problematiky

- vzhľadom na v čase premenlivý podmienený rozptyl nie je teda celkom adekvátne využitie výlučne modelov ARIMA na modelovanie a prognózovanie finančných časových radov výnosov
- existujú viaceré koncepcie riešenia problému nesplnenia podmienok lineárneho modelu triedy ARMA, resp. ARIMA:

-*Mandelbrotova koncepcia* (1963) vychádza z toho, že problém nie je v modeli časového radu, ale v požiadavke normality rozdelenia, ktorá nie je reálna – riešenie: trieda tzv. stabilných rozdelení, t-rozdelenie, rozdelenie GED

-*Engleho koncepcia* (1982) vychádza z predstavy, že problém je v type časového radu – riešenie: modely, ktoré by spĺňali predpoklad v čase sa meniaceho podmieneného rozptylu; pôvodná požiadavka normality sa nemení

-*Nelsonova koncepcia* (1991) – kombinácia predošlých dvoch

Súčasný stav problematiky

- *Modely triedy ARCH*

  -Engleho výsledky pri aplikácii na modely inflácie naznačujú, že veľké a malé chyby prognózy sa vyskytujú v zhlukoch, v roku 1982 navrhol takú formu heteroskedasticity, v ktorej rozptyl chyby prognózy závisí od veľkosti predchádzajúcej náhodnej zložky – ARCH model

  -model ARCH = základ širokej triedy modelov

  -existencia obrovského množstva modifikácií modelu ARCH (abecedný encyklopedický prehľad – Bollerslev (2009))

  -použiteľnosť tejto triedy modelov v makroekonómii a finančnej analýze je veľmi široká, napr. pri analýze inflácie, výmenných kurzov, výnosov burzových indexov, pri tvorbe optimálneho portfólia

Súčasný stav problematiky

- *Modely triedy ARCH*

-hoci modely triedy ARCH charakterizujú vývoj podmieneného rozptylu stochastického procesu a ide teda o modely nelineárne, z hľadiska konkrétnej funkčnej formy modelu podmieneného rozptylu možno rozlišovať *lineárne* a *nelineárne* modely volatility

-*lineárne modely*, napr.

ARCH – Engle (1982)

GARCH – Bollerslev (1986)

GARCH-M – Engle, Lilien, Robins (1987)

-*nelineárne modely*, napr.

EGARCH – Nelson (1991)

GJR – Glosten, Jagannathan a Runkle (1993)

TGARCH – Zakoian (1990)

Súčasný stav problematiky

- *Analýza sezónnych efektov*

-existuje množstvo článkov a štúdií testujúcich vplyv rôznych sezónnych efektov, napr. pondelkového efektu, efektu jednotlivých dní týždňa, efektu neobchodných dní, efektu jednotlivých mesiacov, či fázy hospodárskeho cyklu jednak na úroveň výnosov burzových indexov či výnosov výmenných kurzov, a jednak na úroveň volatility

Rosenberg (2004) – americké burzové indexy: GARCH

Rublíková (2004) – kurz SKK/USD: ARCH, GARCH

Stavárek a Heryán (2012) – BUX, PX, WIG: GARCH-M

-rôzne závery jednotlivých štúdií potvrdzujúce, resp. nepotvrdzujúce existenciu sezónnych efektov v úrovni a volatilite analyzovaných časových radov, príp. poukázanie na použitie neadekvátnej metodológie pri analýze

Súčasný stav problematiky

- *Volatilita a obchodované množstvo*

-existuje viacero prístupov k modelovaniu vzťahu obchodovaného množstva a volatility

-Lamoureux a Lastrapes (1990) – volatilita a obchodované množstvo sú súčasne a pozitívne korelované, keďže sú funkciou stochastickej premennej definovanej ako miera toku informácií; na príklade 20 amerických obchodovaných akcií ukázali, že zahrnutie obchodovaného množstva do rovnice podmieneného rozptylu vedie k zmiznutiu GARCH efektu

-kým štúdie analyzujúce volatilitu individuálnych akcií sú zväčša v súlade so závermi tejto dvojice autorov, v prípade analýzy volatility výnosov burzových indexov už výsledky také jednoznačné nie sú (Sharma, Mougoue a Kamath (1996))

Súčasný stav problematiky

- *Viacrozmerné modely volatility MGARCH*

-popri jednorozmerných modeloch triedy ARCH boli vyvinuté aj viacrozmerné modely volatility

-aplikácia modelov MGARCH je veľmi široká, napr. oblasť výberu portfólia, výpočet value-at-risk, skúmanie previazanosti jednotlivých akciových trhov, overovanie vplyvu rôznych kríz na previazanosť týchto trhov či posúdenie prenosu „nákazy“ (Wang a Moore (2008), Baumöhl a kol. (2010), Horvath a Petrovski (2012))

-v súčasnosti existuje viacero verzií modelov MGARCH, medzi najznámejšie patria

VECH – Bollerslev, Engle a Wooldridge (1988)

BEKK – Baba et al. (1990), Engle a Kroner (1995)

CCC – Bollerslev (1990)

DCC – Engle (2002) a ďalší

Modelovanie časových radov výnosov

- pre priemerných investorov predstavuje výnos aktíva kompletnú bezrozmernú sumárnu informáciu o investičnej príležitosti
- existuje viacero definícií pojmu „výnos aktíva“ (Tsay (2005))
- označme symbolom P_t cenu aktíva (napr. burzového indexu či výmenného kurzu) v čase t
- *jednoduchý hrubý výnos za jedno obdobie*, t.j. za obdobie t-1 až t

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \Rightarrow P_t = P_{t-1}\left(1 + R_t\right)$$

- *jednoduchý čistý výnos za jedno obdobie* nazývaný tiež *jednoduchý výnos*

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Modelovanie časových radov výnosov

- *jednoduchý hrubý výnos za k období* , t.j. za obdobie *t-k* až *t*

$$1+R_t[k]=\frac{P_t}{P_{t-k}}=\frac{P_t}{P_{t-1}}.\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}.\ldots.\frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}}$$
$$=(1+R_t)(1+R_{t-1})\ldots(1+R_{t-k+1})$$
$$=\prod_{j=0}^{k-1}(1+R_{t-j})$$

- *jednoduchý čistý výnos za k období*

$$R_t[k]=\frac{P_t}{P_{t-k}}-1=\frac{P_t-P_{t-k}}{P_{t-k}}$$

- prirodzený logaritmus jednoduchého hrubého výnosu za jedno obdobie nazývame *spojitý výnos* alebo *logaritmický výnos*

$$r_t=\ln(1+R_t)=\ln\frac{P_t}{P_{t-1}}=p_t-p_{t-1}$$, kde $p_t=\ln(P_t)$

Modelovanie časových radov výnosov

- *spojitý výnos (logaritmický výnos) za k období*

$$\begin{aligned} r_t[k] &= \ln(1+R_t[k]) = \ln[(1+R_t)(1+R_{t-1})\ldots(1+R_{t-k+1})] \\ &= \ln(1+R_t) + \ln(1+R_{t-1}) + \ldots + \ln(1+R_{t-k+1}) \\ &= r_t + r_{t-1} + \ldots + r_{t-k+1} \end{aligned}$$

- analýzy sa zvyčajne realizujú pre časové rady logaritmických výnosov r_t
- časový rad r_t možno na základe využitia minulej informácie zahrnutej v informačnej množine Ω_{t-1} vyjadriť ako súčet podmienenej strednej hodnoty a náhodnej zložky v tvare

$$r_t = E(r_t | \Omega_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Modelovanie časových radov výnosov

- problém špecifikácie pri analýze časového radu možno vo všeobecnosti zhrnúť do troch krokov:
  - špecifikácia podmienenej strednej hodnoty $E\left(r_t \middle| \Omega_{t-1}\right)$
  - špecifikácia podmieneného rozptylu h_t
  - špecifikácia podmienenej hustoty rozdelenia ε_t
- špecifikácia podmienenej strednej hodnoty - najčastejšie:

$$r_t = \omega_0 + \sum_{j=1}^{m} \phi_j r_{t-j} + \sum_{k=1}^{n} \theta_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t$$

- špecifikácia podmieneného rozptylu

$E\left(\varepsilon_t^2 \middle| \Omega_{t-1}\right) = h_t$, kde $h_t = h_t\left(\Omega_{t-1}\right)$ je nezáporná funkcia

$\Rightarrow \varepsilon_t$ je podmienene heteroskedastické

dekompozícia $\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$, kde $z_t \sim iidN(0,1)$

Jednorozmerné modely triedy ARCH

- *Lineárne modely*

ARCH(1) - najjednoduchší z triedy modelov ARCH

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

ARCH(q) - všeobecná verzia modelu ARCH

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

GARCH(1,1) – zovšeobecnenie modelu ARCH

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

$\alpha_1 + \beta_1$ zotrvačnosť náhodných šokov

Jednorozmerné modely triedy ARCH

- *Lineárne modely*

GARCH(p,q) – všeobecná verzia modelu GARCH

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}$$

GARCH(p,q)-M – popisuje vzťah medzi výnosom a jeho variabilitou

$$r_t = \omega_0 + \sum_{j=1}^{m} \phi_j r_{t-j} + \sum_{k=1}^{n} \theta_k \varepsilon_{t-k} + \delta g(h_t) + \varepsilon_t$$

kde $g(h_t)$ je funkciou podmieneného rozptylu h_t

$$g(h_t) = h_t,\quad g(h_t) = \sqrt{h_t} \quad \text{alebo} \quad g(h_t) = \ln(h_t)$$

δ je neznáma hodnota parametra

Jednorozmerné modely triedy ARCH

- *Nelineárne modely*

EGARCH(p,q,r)

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \frac{|\varepsilon_{t-i}|}{\sqrt{h_{t-i}}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \ln(h_{t-j}) + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \frac{\varepsilon_{t-k}}{\sqrt{h_{t-k}}}$$

GJR-GARCH(p,q,r), resp. **GJR(p,q,r)**

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j} + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \varepsilon_{t-k}^2 I_{t-k}^-$$

kde $$I_{t-k}^- = \begin{cases} 1, ak\ \varepsilon_{t-k} < 0 \\ 0,\ ak\ \varepsilon_{t-k} > 0 \end{cases}$$

TGARCH(p,q,r)

$$\sqrt{h_t} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i |\varepsilon_{t-i}| + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sqrt{h_{t-j}} + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k |\varepsilon_{t-k}| I_{t-k}^-$$

Jednorozmerné modely triedy ARCH

- *Testovanie prítomnosti sezónnych efektov*

- do rovnice úrovne, t. j. do rovnice podmienenej strednej hodnoty zahrnieme umelé premenné zodpovedajúce rôznym sezónnym efektom, a to napr.

jednotlivým mesiacom roka $Y_{lt}\ (l = 2, 3, \ldots 12)$

druhej polovici mesiaca M_t

jednotlivým dňom týždňa $D_{rt}\ (r = 2, 3, 4, 5)$

$$r_t = \omega_0 + \sum_{j=1}^{m} \phi_j r_{t-j} + \sum_{k=1}^{n} \theta_k \varepsilon_{t-k} + \sum_{l=2}^{12} \mathrm{K}_l Y_{lt} + \Lambda M_t + \sum_{r=2}^{5} \Pi_r D_{rt} + \varepsilon_t$$

- do rovnice podmieneného rozptylu zahrnieme umelé premenné

$$\sum_{l=2}^{12} \kappa_l Y_{lt} + \lambda M_t + \sum_{r=2}^{5} \pi_r D_{rt}$$

Jednorozmerné modely triedy ARCH

- *Volatilita a obchodované množstvo*

  -prístup Lamoureuxa a Lastrapesa (1990) - zahrnutie obchodovaného množstva V_t do rovnice podmieneného rozptylu by malo spôsobiť redukciu zotrvačnosti podmieneného rozptylu, parameter ψ by mal byť štatisticky významný a kladný

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j} + \psi V_t$$

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \frac{|\varepsilon_{t-i}|}{\sqrt{h_{t-i}}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \ln(h_{t-j}) + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \frac{\varepsilon_{t-k}}{\sqrt{h_{t-k}}} + \psi V_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j} + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \varepsilon_{t-k}^2 I_{t-k}^{-} + \psi V_t$$

Viacrozmerné modely triedy ARCH

- jednorozmerné modely triedy ARCH – podmienený rozptyl jednotlivých časových radov je modelovaný nezávisle od iných časových radov; neumožňujú tak napr. zachytenie previazanosti medzi jednotlivými trhmi
- zovšeobecnenie jednorozmerných modelov triedy ARCH na ich viacrozmernú verziu MGARCH zohráva preto významnú úlohu
- uvažujme N finančných časových radov výnosov a symbolom $\mathbf{r_t}$ označme $N \times 1$rozmerný vektor finančných časových radov výnosov v tvare

$$\mathbf{r_t} = E\left(\mathbf{r_t} \middle| \Omega_{t-1}\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t}$$

kde $E\left(\mathbf{r_t} \middle| \Omega_{t-1}\right)$ je vektor podmienenej strednej hodnoty

$\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t}$ je $N \times 1$ rozmerný vektor náhodných zložiek

Viacrozmerné modely triedy ARCH

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{t}} = \mathbf{H}_{\mathbf{t}}^{1/2}\mathbf{z}_{\mathbf{t}}$$

$\mathbf{H}_{\mathbf{t}}$ je pozitívne definitná podmienená var.-kov. matica rozmeru $N \times N$

$\mathbf{z}_{\mathbf{t}}$ označuje náhodný vektor rozmeru $N \times 1$

$E(\mathbf{z}_{\mathbf{t}}) = \mathbf{0}$ a $E(\mathbf{z}_{\mathbf{t}}\mathbf{z}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{T}}) = \mathbf{I}_N$

- existuje viacero možných špecifikácií matice $\mathbf{H}_{\mathbf{t}}$, ktoré zodpovedajú rôznym variantom modelov MGARCH
- problém: so zvyšujúcim sa rozmerom vektora $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{t}}$ narastá aj počet parametrov v modeli, čo môže byť značne problematické z hľadiska ich odhadu
- ďalší aspekt: zabezpečenie pozitívnej definitnosti matice $\mathbf{H}_{\mathbf{t}}$

Viacrozmerné modely triedy ARCH

- *Model CCC-ARCH*

-ide o model s v čase sa meniacimi podmienenými rozptylmi a kovarianciami, avšak s konštantnými podmienenými koreláciami

-podmienené rozptyly a kovariancie možno modelovať separátne s využitím jednorozmerných modelov triedy ARCH umožňujúcich použitie rôznych špecifikácií

-v druhom kroku nasleduje odhad matice podmienených korelácií

-matica $\mathbf{H_t}$ v CCC modeli je dekomponovaná nasledovne

$$\mathbf{H_t} = \mathbf{D_t R D_t} = \left\{ \rho_{ij} \sqrt{h_{iit} h_{jjt}} \right\}$$

kde $\mathbf{D_t} = diag\left(h_{11t}^{1/2}, \ldots, h_{NNt}^{1/2}\right)$ je diagonálna matica podmienených štandardných odchýlok

$\mathbf{R} = \{\rho_{ij}\} \ (\rho_{ii} = 1, \forall i)$ je symetrická matica konštantných podmienených korelácií

Viacrozmerné modely triedy ARCH

- *Model DCC-ARCH*

-v prvom kroku sú odhadované jednorozmerné modely triedy ARCH

-v druhom kroku nasleduje odhad matice podmienených korelácií

-matica $\mathbf{H_t}$ v DCC modeli je dekomponovaná nasledovne

$$\mathbf{H_t} = \mathbf{D_t R_t D_t}$$

kde $\mathbf{R_t}$ je v čase sa meniaca korelačná matica obsahujúca podmienené korelačné koeficienty

$$\mathbf{R_t} = diag(\mathbf{Q_t})^{-1/2}\mathbf{Q_t}\,diag(\mathbf{Q_t})^{-1/2} \qquad \mathbf{Q_t} = (1 - q_a - q_b)\bar{\mathbf{Q}} + q_a \mathbf{z_{t-1}} \mathbf{z_{t-1}^T} + q_b \mathbf{Q_{t-1}}$$

$$q_a + q_b < 1$$

$$\rho_{ij,t} = \frac{q_{ij,t}}{\sqrt{q_{ii,t}\, q_{jj,t}}}; \quad i, j = 1,2,\ldots,n; \; i \neq j$$

Záver

- napriek tomu, že idea modelu ARCH bola publikovaná Englem už pred vyše tridsiatimi rokmi, ešte i dnes neustále vznikajú nové modifikácie tohto modelu
- popísali sme súčasný stav problematiky súvisiaci s modelovaním volatility finančných časových radov
- venovali sme sa viacerým jednorozmerným lineárnym a nelineárnym modelom triedy ARCH, skúmaniu sezónnych efektov a tiež analýze vplyvu obchodovaného množstva na zotrvačnosť vo volatilite
- vzhľadom na to, že dianie na jednotlivých finančných trhoch nie je izolované, bola pozornosť venovaná tiež vybraným viacrozmerným verziám modelu triedy ARCH

Literatúra

- BABA, Y. et al. 1990. Multivariate simultaneous generalized ARCH. Mimeo, Department of Economics, University of California, San Diego, 1990.
- BAUMÖHL, E. – FARKAŠOVSKÁ, M. – VÝROST, T. 2010. Integrácia akciových trhov: DCC MV-GARCH model. In *Politická ekonomie*, 2010, č. 4, s. 488-503.
- BOLLERSLEV, T. 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. In *Journal of Econometrics*, 1986, vol. 31, No. 3, p. 307-327.
- BOLLERSLEV, T. 1990. Modeling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model. In *Review of Economics and Statistics*, 1990, vol. 72, p. 498-505.
- BOLLERSLEV, T. 2009. Glossary to ARCH (GARCH). [online]. 2009, 41 p. [cit. 2013.08.20]. Dostupné na internete: http://public.econ.duke.edu/~boller/Papers/glossary_arch.pdf.
- BOLLERSLEV, T. – ENGLE, R.F. – WOOLDRIDGE, J.M. 1988. A Capital-Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances. In *Journal of Political Economy*, 1988, vol. 96, No. 1, p. 116-131.
- ENGLE, R.F. 1982. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. In *Econometrica*, 1982, vol. 50, No. 4, p. 987-1007.Engle a Kroner (1995)
- ENGLE, R. F. 2002. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. In *Journal of Business and Economic Statistics*, 2002, vol. 20, p. 339–350.
- ENGLE, R. F. – LILIEN, D. M. – ROBINS, R. P. 1987. Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH-M model. In *Econometrica*, 1987, vol. 55, p. 391-407.
- FRANSES, P. H. – DIJK, D. van 2000. *Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 298 p. ISBN 978-0521779654.
- GLOSTEN, L. – JAGANNATHAN, R. – RUNKLE, D. 1993. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. In *Journal of Finance*, 1993, Vol. 48, p. 1779-1801.

Literatúra

- HORVATH, R. – PETROVSKI, D. 2012. International Stock Market Integration: Central and South Eastern Europe Compared. [online]. In *William Davidson Institue Working Papers Series*, 2012, wp 1028, 18 p. [cit. 2013.08.20]. Dostupné na internete: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2078238.
- CHOCHOLATÁ, M. 2014. *Modelovanie volatility finančných časových radov pomocou modelov triedy ARCH*: habilitačná prednáška. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2014. 56 s. ISBN 978-80-225-3863-3.
- LAMOUREUX C. – LASTRAPES N. 1990. Heteroscedasticity in stock return data: volume versus GARCH Effects. In *The Journal of Finance*, 1990, Vol. XLV, March 1990, No. 1, p. 221-229.
- MANDELBROT, B. 1963. The variation of certain speculative prices. In *Journal of Business*, 1963, vol. 36, p. 394 – 419.
- NELSON, D. 1991. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. In *Econometrica*, 1991, vol. 59, p. 347-370.
- ROSENBERG, M. 2004. The Monthly Effect in Stock Returns and Conditional Heteroscedasticity. In *The American Economist*, 2004, vol. 48, No. 2, p. 67-73.
- RUBLÍKOVÁ, E. 2004. ARCH and GARCH Models for Daily Exchange Rate of SKK/USD. In *Ekonomické rozhľady*, ISSN 0323-262X, 2004, vol. XXXIII, No. 3, p. 314-323.
- SHARMA, J.L. – MOUGOUE, M. – KAMATH, R. 1996. Heteroscedasticity in stock market indicator return data: volume versus GARCH effects. In *Applied Financial Economics*, 1996, Vol. 6, p. 337-342.
- STAVÁREK, D. – HERYÁN, T. 2012. Day of the Week Effect in Central European Stock Markets. In *E+M Ekonomie a Management*, ISSN 1212-3609, 2012, No. 4, p. 134-146.
- TSAY, R.S. 2005. *Analysis of Financial Time Series*. Second Edition. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2005, 605 p. ISBN-13 978-0-471-69074-0.
- WANG, P. – MOORE, T. 2008. Stock Market Integration for the Transition Economies: Time-Varying Conditional Correlation Approach. In *The Manchester School* , 2008, vol. 76, No. 1, p. 116-133.
- ZAKOIAN, J.M. 1990. *Threshold heteroskedastic models*. Manuscript, CREST, INSEE, Paris, 1990.