Riešenie úlohy viacnásobného obchodného cestujúceho s časovými oknami v programe GAMS

Zuzana Čičková, Katarína Čemická

ÚLOHA VIACNÁSOBNÉHO OBCHODNÉHO CESTUJÚCEHO

- Dôležitým faktorom pri manažmente logistického reťazca firiem je určenie trás rozvozu, resp. zvozu materiálu, kde sa požaduje obsluha zákazníka z určitej lokality, tak aby celkové prepravné náklady a ostatné náklady súvisiace s prepravou boli minimálne.
- Z praktického hľadiska nie je vždy reálne predpokladať, že požiadavky všetkých zákazníkov možno uspokojiť použitím len jedného vozidla. Preto je nevyhnutné do matematických modelov zakomponovať možnosť použitia viacerých vozidiel, pričom sa zvyčajne po obsluhe zákazníkov uvažuje s návratom vozidla (vozidiel) do centra pri zohľadnení prípadných ďalších špecifickým požiadaviek týkajúcich sa obsluhy.
- Podstatou tejto úlohy je nájsť optimálnu, t.j. najkratšiu, alebo v inom zmysle najmenej nákladnú okružnú cestu pre viacero vozidiel na grafe G={U,H}, kde U reprezentuje množinu uzlov (lokality zákazníkov) a H reprezentuje množinu hrán (zvyčajne uvažujeme s úplným grafom = s vyčíslenými najkratšími vzdialenosťami medzi každou dvojicou uzlov), ktorá spočíva v prepojení uzlov tak, že začiatočný aj koncový uzol pre každú okružnú jazdu je totožný a každý iný uzol je navštívený práve jedným vozidlom práve raz

FORMULÁCIA ÚLOHY VIACNÁSOBNÉHO OBCHODNÉHO CESTUJÚCEHO

Nech je dopravná sieť popísaná formou konečného neorientovaného úplného grafu $\overline{G} = \{U, \overline{H}\}$, kde $U = \{u_i,\ i = 1, 2, \dots n\}$ predstavuje neprázdnu n prvkovú množinu uzlov grafu a $\overline{H} \subset U \times U$ predstavuje množinu hrán $h_{ij} = (u_i, u_j) \in H$, medzi každou dvojicou uzlov (u_i, u_j). Matica D $= \{d_{ij}\}$ rozmeru n x n je potom maticou najkratších vzdialeností, resp. maticou najrýchlejších vzdialeností medzi všetkými uzlami v sieti. Z množiny uzlov $U = \{u_i,\ i = 1, 2, \dots n\}$ uzol u_1 predstavuje lokalizáciu strediska a vo vrcholoch u_i, $i = 2, 3, \dots n$ budú umiestnení zákazníci. Pre $i, j = 1, 2, \dots n$, $i \neq j$ zavedieme binárne premenné x_{ij} s nasledujúcim významom:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ak úsek } (i, j) \text{ je súčasťou okružnej cesty} \\ \\ 0, \text{ v opačnom prípade} \end{cases}$$

Nech k ($k \leq n$-1) predstavuje počet vozidiel a nech parameter s predstavuje maximálny možný počet zákazníkov navštívených jedným vozidlom. Cieľom je navštíviť každého zákazníka práve raz, pričom k obsluhe môže byť použité ľubovoľné vozidlo, kde trasa každého vozidla musí končiť v stredisku.

MATEMATICKÝ MODEL ÚLOHY VIACNÁSOBNÉHO OBCHODNÉHO CESTUJÚCEHO

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \tag{2}$$

za podmienok

$$\sum_{i=2}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 2, 3, \ldots n \qquad i \neq j \tag{3}$$

$$\sum_{j=2}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 2, 3, \ldots n \qquad i \neq j \tag{4}$$

$$\sum_{j=2}^{n} x_{1j} = k \tag{5}$$

$$\sum_{i=2}^{n} x_{i1} = k \tag{6}$$

$$u_i - u_j + s x_{ij} \leq s - 1 \qquad i = 1, 2, \ldots n \qquad j = 2, 3, \ldots n \qquad i \neq j \tag{7}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i, j = 1, 2, \ldots n \qquad i \neq j \tag{8}$$

FORMULÁCIA ÚLOHY V PROGRAME GAMS

```
Sets
   i uzol /1*n/
   subi(i) /2*n/
   alias (i,j)
   alias (subi,subj);
   Set ij1(i,j) /1*n.1*n/
      ij2(i,j) /1*n.2*n/
      ij3(i,j) /1.1,2.2,...n.n/
      ij4(i,j)
      ij5(i,j) ;
   ij4(i,j)=ij1(i,j)-ij3(i,j);
   ij5(i,j)=ij2(i,j)-ij3(i,j);
Table d(i,j);
Scalar s, k;
Binary Variable x(i,j);
Free Variable u(j), z;
Equations
   ohr1(i) ,   ohr2(j),    ohr3(i,j),    ohr4,    ohr5,    ucel;
ucel.. z=e=sum((i,j),d(i,j)*x(i,j));
ohr1(subi(i)).. sum(j,x(i,j)$ij4(i,j))=e=1;
ohr2(subj(j)).. sum(i,x(i,j)$ij4(i,j))=e=1;
ohr3(i,j)$ij5(i,j).. u(i)-u(j)+s*x(i,j)=l=s-1;
ohr4.. sum(subj(j),x('1',j))=e=k;
ohr5.. sum(subi(i),x(i,'1'))=e=k
Model mtsp1 /all/;
Solve mtsp1 using mip minimizing z;
Display x.l, u.l;
```

PROBLEMATIKA ČASOVÝCH OBMEDZENÍ

- Ďalej uvedieme model úlohy viacnásobného obchodného cestujúceho s časovými oknami s čakaním, kde budeme predpokladať známy počet vozidiel *k*. Za časové okno pre každého zákazníka u_i , $i = 2, 3, ...n$, (okrem strediska u_1) budeme považovať interval medzi najskôr možným začiatkom obsluhy *i*-teho zákazníka e_i a najneskôr prípustným koncom obsluhy tohto zákazníka l_i. Ak označíme τ_i reálny začiatok a predpokladáme známy čas obsluhy všetkých zákazníkov o_i, potom musí platiť pre každý uzol okrem strediska vzťah: $ei \leq \tau_i$ a $\tau_i + o_i \leq li$, kde o_i reprezentuje čas potrebný pre obsluhu *i*-teho zákazníka, $i = 2, 3, ...n$. Ďalej predpokladajme, že matica **D** je maticou najrýchlejších vzdialeností a jej prvky sú udávané v časových jednotkách.
- Uvažujme ďalej so situáciou, keď nie je možné uskutočniť obsluhu zákazníkov so zohľadnením všetkých časových okien. Potom je nevyhnutné uvažovať s čakaním vozidla. Označme čas čakania u *j*-teho zákazníka w_j, $j=2,3,...n$. Budeme uvažovať so stratégiou čakania u nasledujúceho zákazníka, t.j. vozidlo pôjde k *j*-temu zákazníkovi hneď po uskutočnení obsluhy *i*-teho zákazníka a bude čakať na tzv. „otvorenie“ časového okna, t.j. do okamihu e_j. Premenné τ_i takto predstavujú reálny čas začiatku obsluhy *i*-teho zákazníka, $i= 2, 3, ...n$.

MATEMATICKÝ MODEL

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} + \sum_{i=2}^{n} o_i + \sum_{j=2}^{n} w_j \qquad (10)$$

za podmienok

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 2, 3, \ldots n \qquad i \neq j \qquad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 2, 3, \ldots n \qquad i \neq j \qquad (12)$$

$$\tau_i + o_i + w_j + d_{ij} + p_{ij} - M\left(1 - x_{ij}\right) = \tau_j \qquad i = 1, 2, \ldots n \quad j = 2, 3, \ldots n \quad i \neq j \qquad (13)$$

$$0 \leq p_{ij} \leq 2M * \left(1 - x_{ij}\right) \quad i = 1, 2, \ldots n \quad j = 2, 3, \ldots n \quad i \neq j \qquad (14)$$

$$e_i \leq \tau_i \qquad i = 2, 3, \ldots n \qquad (15)$$

$$\tau_i + o_i \leq l_i \qquad i = 2, 3, \ldots n \qquad (16)$$

$$\tau_1 = 0 \qquad (17)$$

$$o_1 = 0 \qquad (18)$$

$$\sum_{j=2}^{n} x_{1j} = k \qquad (19)$$

$$\sum_{i=2}^{n} x_{i1} = k \qquad (20)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i, j = 1, 2, \ldots n \qquad i \neq j \qquad (21)$$

$$w_j \geq 0 \qquad j=2,3,\ldots n \qquad (22)$$

FORMULÁCIA ÚLOHY V PROGRAME GAMS

```
Sets
      i vystup /1*n/
      subi(i)  /2*n/
      alias (i,j)
      alias (subi, subj);
      Set ij1(i,j) /1*n.1*n/
          ij2(i,j) /1*n.2*n/
          ij3(i,j) /1.1,2.2,...n.n/
          ij4(i,j)
          ij5(i,j) ;
          ij4(i,j)=ij1(i,j)-ij3(i,j);
          ij5(i,j)=ij2(i,j)-ij3(i,j);
 Table d(i,j);
 Scalar k;
 Parameters      e(j),      l(j),      o(j);
 Binary variables x(i,j);
 Positive variables w(i),p(i,j);
 Free variable u, t(i);
      t.fx('1')=0;
 Equations
      ohr1(i) ,  ohr2(j), ohr3(i,j),  ohr4(j),  ohr5(j),  ohr6(i,j),  ohr7,  ohr8,  ucel;
 ucel.. u=e=sum((i,j),d(i,j)*x(i,j))+sum(subi(i),o(i))+sum(subi(i),w(i));
ohr1(subi(i)).. sum(j,x(i,j)$ij4(i,j))=e=1;
ohr2(subj(j)).. sum(i,x(i,j)$ij4(i,j))=e=1;
ohr3(i,j)$ij5(i,j).. t(i)+o(i)+w(j)-t(j)+d(i,j)-M*(1-x(i,j))+p(i,j)=e=0;
ohr4(subj(j)).. t(j)+o(j)=l=l(j);
ohr5(subj(j)).. t(j)=g=e(j);
ohr6(i,j)$ij5(i,j).. p(i,j)=l=2*M*(1-x(i,j));
ohr7.. sum(subj(j),x('1',j))=e=k;
ohr8.. sum(subi(i),x(i,'1'))=e=k;
Model mtsptw1 /all/;
Solve mtsptw1 using mip minimizing u;
Display x.l,t.l;
```