Prognózovanie za predpokladu existencie podmienenej heteroskedasticity

Michaela Chocholatá

Je všeobecne známe, že vysokofrekvenčné časové rady (napr. výmenné kurzy, burzové indexy) sa vyznačujú v čase sa meniacou volatilitou. Uvažujme časový rad

$$y_t = E\left[y_t \middle| \Omega_{t-1}\right] + \varepsilon_t \qquad (1)$$

kde $t = 1,2,...,T$ a symbolom Ω_{t-1} označme informačnú množinu, resp. minulú informáciu v čase t-1, ktorá môže byť využitá na prognózovanie budúcich hodnôt $y_t, y_{t+1}, y_{t+2},...$. $E\left[y_t \middle| \Omega_{t-1}\right]$ predstavuje podmienenú strednú hodnotu (predikovateľná zložka) a ε_t predstavuje nepredikovateľnú zložku, pričom o podmienenom rozptyle $E\left[\varepsilon_t^2 \middle| \Omega_{t-1}\right]$ predpokladáme, že sa mení v čase.

Existencia volatility meniacej sa v čase má veľký vplyv aj z hľadiska konštrukcie prognóz ex-ante. Optimálna prognóza na *h* období dopredu, t.j. prognóza hodnoty y_{t+h}, ktorú označíme $\hat{y}_{t+h|t}$, je totiž daná podmienenou strednou hodnotou bez ohľadu na to, či šoky ε_t sú podmienene heteroskedastické alebo nie. Podmienený rozptyl príslušnej chyby prognózy $e_{t+h|t} = y_{t+h} - \hat{y}_{t+h|t}$ sa v čase mení, čo bolo jedným z dôvodov navrhnutia modelu ARCH Englem v roku 1982 [4], $e_{t+h|t}$ predstavuje lineárnu kombináciu šokov vyskytujúcich sa medzi počiatkom prognózy a horizontom prognózy $\varepsilon_{t+1},...,\varepsilon_{t+h}$. Keďže podmienený rozptyl týchto šokov sa v čase mení, v čase premenlivý je aj podmienený rozptyl akejkoľvek funkcie týchto šokov (pozri napr. [5]).

Teraz detailne preskúmame situáciu, keď časový rad y_t možno popísať modelom AR(1) v tvare

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (2)$$

a podmienený rozptyl šokov ε_t je popísateľný modelom GARCH(1,1)[1], t.j.

[1] Model GARCH bol prvýkrát prezentovaný v roku 1986 Bollerslevom v [3].

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \tag{3}$$

pričom ϕ_1 je neznáma hodnota parametra modelu AR(1) a $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$ a $\beta_1 \geq 0$ označujú parametre zaručujúce nezápornosť hodnoty podmieneného rozptylu h_t. Všeobecnému prípadu ARMA(k,l) – GARCH(p,q) modelov sa venovali Baillie a Bollerslev v [2].

V ďalšej časti príspevku sa budeme venovať prognózovaniu podmienenej strednej hodnoty a prognózovaniu podmieneného rozptylu pre lineárne modely volatility (pozri [1], [5]).

Prognózovanie podmienenej strednej hodnoty

Symbolom $\hat{y}_{t+h|t}$ označme prognózu y_t na h období dopredu, ktorá minimalizuje štvorcovú chybu prognózy (squared prediction error – SPE):

$$SPE(h) \equiv E\left[e_{t+h|t}^2\right] = E\left[\left(y_{t+h} - \hat{y}_{t+h|t}\right)^2\right], \tag{4}$$

kde $e_{t+h|t}$ bolo definované vyššie. Baillie a Bollerslev [2] ukázali (pozri aj [5]), že prognóza, ktorá minimalizuje (4) je rovnaká bez ohľadu na to, či šoky ε_t v (2) sú podmienene homoskedastické alebo podmienene heteroskedastické. Znamená to teda, že optimálna prognóza hodnoty y_{t+h} je vlastne jej podmienenou strednou hodnotou v čase *t*, t.j.

$$\hat{y}_{t+h|t} = E\left[y_{t+h} \middle| \Omega_t\right]. \tag{5}$$

Pre AR(1) model (2) to znamená, že optimálna prognóza na 1 obdobie dopredu je daná vzťahom $\hat{y}_{t+1|t} = \phi_1 y_t$. Prognózy pre obdobia $h > 1$ možno získať na základe rekurzívneho vzťahu

$$\hat{y}_{t+h|t} = \phi_1 \hat{y}_{t+h-1|t} \tag{6}$$

alebo priamo na základe vzťahu

$$\hat{y}_{t+h|t} = \phi_1^h y_t\,. \qquad (7)$$

Chybu prognózy pre obdobie *t+h* vypočítame potom nasledovne:

$$\begin{aligned} e_{t+h|t} = y_{t+h} - \hat{y}_{t+h|t} &= \phi_1 y_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h} - \phi_1^h y_t \\ &= \phi_1^2 y_{t+h-2} + \phi_1 \varepsilon_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h} - \phi_1^h y_t \\ &= \ldots \\ &= \phi_1^h y_t + \sum_{i=1}^{h} \phi_1^{h-i} \varepsilon_{t+i} - \phi_1^h y_t \\ &= \sum_{i=1}^{h} \phi_1^{h-i} \varepsilon_{t+i}\,. \end{aligned} \qquad (8)$$

Podmienená SPE pre $e_{t+h|t}$ je daná vzťahom

$$\begin{aligned} E\left[e_{t+h|t}^2 \middle| \Omega_t\right] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{h} \phi_1^{h-i} \varepsilon_{t+i}\right)^2 \middle| \Omega_t\right] \\ &= \sum_{i=1}^{h} \phi_1^{2(h-i)} E\left[\varepsilon_{t+i}^2 \middle| \Omega_t\right] \\ &= \sum_{i=1}^{h} \phi_1^{2(h-i)} E\left[h_{t+i} \middle| \Omega_t\right]. \end{aligned} \qquad (9)$$

V prípade homoskedastických porúch je podmienená SPE pre optimálnu prognózu na h období dopredu konštantná, keďže $E\left[h_{t+i} \middle| \Omega_t\right]$ je konštanta rovná nepodmienenému rozptylu ε_t, t.j. σ^2. Zo vzťahu (9) je zrejmé, že v prípade heteroskedastických porúch sa podmienená SPE mení v čase. Pre názornosť prepíšeme vzťah (9) do tvaru (pozri [5]):

$$E\left[e_{t+h|t}^2 \middle| \Omega_t\right] = \sum_{i=1}^{h} \phi_1^{2(h-i)} \sigma^2 + \sum_{i=1}^{h} \phi_1^{2(h-i)} \left(E\left[h_{t+i} \middle| \Omega_t\right] - \sigma^2\right). \qquad (10)$$

Prvý člen pravej strany vzťahu (10) predstavuje SPE pre homoskedastické poruchy, druhý člen v tomto vzťahu môže nadobúdať tak kladnú ako aj zápornú hodnotu, v závislosti od podmieneného očakávania budúcej volatility. Z uvedeného vyplýva, že podmienená SPE v prípade heteroskedastických porúch môže nadobudnúť väčšiu i menšiu hodnotu ako v prípade homoskedastických porúch.

So zväčšujúcim sa horizontom prognózy, SPE v prípade homoskedasticity konverguje k nepodmienenému rozptylu modelu (pozri napr. [5]).

Podmienenú SPE zo vzťahu (9) možno použiť na konštrukciu intervalovej prognózy. Podmienené rozdelenie chyby prognózy $e_{t+h|t}$ však nie je normálne, preto tradičná intervalová prognóza nepredstavuje spoľahlivé meradlo skutočnej neistoty prognózy. Ako ďalšia komplikácia v súvislosti s použitím vzťahu (9) sa môže javiť potreba získania prognózy podmieneného rozptylu, čomu sa venujeme nižšie.

Prognózovanie podmieneného rozptylu pre lineárne modely volatility

V prípade modelu GARCH(1,1) možno optimálnu prognózu podmieneného rozptylu na *s* období dopredu, t.j. h_{t+s} získať rekurzívne na základe vzťahu

$$\hat{h}_{t+s|t} = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}^2_{t+s-1|t} + \beta_1 \hat{h}_{t+s-1|t}, \tag{11}$$

kde z definície vyplýva, že $\hat{\varepsilon}^2_{t+i|t} = \hat{h}_{t+i|t}$ pre $i > 0$, kým $\hat{\varepsilon}^2_{t+i|t} = \varepsilon^2_{t+i}$ a $\hat{h}_{t+i|t} = h_{t+i}$ pre $i \leq 0$. Inou možnosťou je nasledovná rekurzívna substitúcia v (11):

$$\hat{h}_{t+s|t} = \alpha_0 \sum_{i=0}^{s-1} (\alpha_1 + \beta_1)^i + (\alpha_1 + \beta_1)^{s-1} h_{t+1}, \tag{12}$$

ktorá nám umožňuje výpočet prognózy na *s* období dopredu priamo z h_{t+1}, ktoré je súčasťou informačnej množiny Ω_t. Ak je model GARCH(1,1) stacionárny v kovarianciách, t.j. ak platí $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, možno vzťah (12) prepísať nasledovne:

$$\hat{h}_{t+s|t} = \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^{s-1} \left(h_{t+1} - \sigma^2\right), \tag{13}$$

kde $\sigma^2 = \alpha_0 / (1 - \alpha_1 - \beta_1)$ je nepodmienený rozptyl ε_t, z ktorého je zrejmé, že prognózy podmieneného rozptylu sú podobné prognózam z modelu AR(1) so strednou hodnotou σ^2 a autoregresným parametrom $\alpha_1 + \beta_1$.

Za účelom vyjadrenia neistoty prognózy podmieneného rozptylu na s období dopredu možno uvažovať s príslušnou chybou prognózy $v_{t+s|t} \equiv h_{t+s} - \hat{h}_{t+s|t}$. Po odpočítaní výrazu (11) od definície modelu GARCH(1,1) pre h_{t+s}, t.j. $h_{t+s} = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t+s-1}^2 + \beta_1 h_{t+s-1}$, dostávame pre zodpovedajúcu chybu prognózy

$$
\begin{aligned}
v_{t+s|t} &\equiv h_{t+s} - \hat{h}_{t+s|t} \\
&= \alpha_1 \left(\varepsilon_{t+s-1}^2 - \hat{\varepsilon}_{t+s-1|t}\right) + \beta_1 \left(h_{t+s-1} - \hat{h}_{t+s-1|t}\right) \\
&= \alpha_1 \left(\varepsilon_{t+s-1}^2 - h_{t+s-1} + h_{t+s-1} - \hat{h}_{t+s-1|t}^2\right) + \beta_1 \left(h_{t+s-1} - \hat{h}_{t+s-1|t}\right) \\
&= \alpha_1 v_{t+s-1} + (\alpha_1 + \beta_1) v_{t+s-1|t}
\end{aligned} \tag{14}
$$

pričom sme využili vzťah $\hat{\varepsilon}_{t+i|t}^2 = \hat{h}_{t+i|t}$ pre $i > 0$ a definíciu $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$. Pokračujúc v rekurzívnej substitúcii dostaneme

$$
\begin{aligned}
v_{t+s|t} &= \alpha_1 v_{t+s-1} + (\alpha_1 + \beta_1)\alpha_1 v_{t+s-2} + \ldots + (\alpha_1 + \beta_1)^{s-2} \alpha_1 v_{t+1} \\
&= \alpha_1 \sum_{i=1}^{s-1} (\alpha_1 + \beta_1)^{i-1} v_{t+s-i}
\end{aligned} \tag{15}
$$

Keďže v_t sú sériovo nekorelované a možno ich prepísať ako $v_t = h_t\left(z_t^2 - 1\right)$, z toho vyplýva, že podmienená SPE prognózy $\hat{h}_{t+s|t}$ je daná vzťahom[2]

$$
E\left[v_{t+s|t}^2 \middle| \Omega_t\right] = (\kappa - 1)\alpha_1^2 \sum_{i=1}^{s-1} (\alpha_1 + \beta_1)^{2(i-1)} E\left[h_{t+s-i}^2 \middle| \Omega_t\right] \tag{16}
$$

kde symbol κ označuje šikmosť pre z_t. K výpočtu tejto strednej štvorcovej chyby treba poznať podmienenú strednú hodnotu budúceho podmieneného štvrtého momentu, t.j.

---

[2] Keďže ε_t je podmienene heteroskedastické, t.j. $\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$, o z_t predpokladáme, že je nezávislé a rovnako rozdelené s nulovou strednou hodnotou a jednotkovým rozptylom a má štandardizované normálne rozdelenie.

$E\left[h^2_{t+s-i} \middle| \Omega_t\right]$. Jej odvodenie je uvedené v práci [2]. Podmienenú SPE (16) možno použiť na výpočet intervalových prognóz podmieneného rozptylu, ktorých konštrukcia je však problematická, keďže pravdepodobnostné rozdelenie chýb prognózy $v_{t+s|t}$ nie je normálne.

Literatúra

[1] ARLT, J.- ARLTOVÁ, M.: Finanční časové řady. Praha, Grada 2003.

[2] BAILLIE, R.T. – BOLLERSLEV, T.: Prediction in dynamic models with time-dependent conditional variances. Journal of Econometrics 52, 1992, s. 91-113.

[3] BOLLERSLEV, T.: Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Journal of Econometrics 31, 1986, č.3.

[4] ENGLE, R.F.: Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. Econometrica 50, 1982, č.4.

[5] FRANSES, P.H. – DIJK, D. van: Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance, Cambridge, Cambridge University Press 2000.

[6] CHOCHOLATÁ, M.: Modely a metódy pre analýzu výmenného kurzu. Dizertačná práca KOVE FHI EU, Bratislava 2005.

Kontakt

Ing. Michaela Chocholatá, PhD., Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1/b, 852 35 Bratislava, tel. 02/67295832, e-mail: chocholatam@yahoo.com