

Lokalizácia skladu v euklidovskej rovine

Brezina Ivan – Pekár Juraj

Úloha: I

Nájsť optimálne umiestnenie skladu pri známych 32 slovenských mestách, pre ktoré sú známe mesačné odberné množstvá a ich súradnice.

Uvažované mestá:

BA, BB, BJ, HE, KE, KN, LC, LM, LV, MA, MI, MT, NR, NZ, PB, PD, PE, PK, PN, PO, PP, RK, RS, RV, SI, SN, TN, TO, TT, ZA, ZH, ZV

Uvažované odberné množstvá v jednotlivých mestách v m³:

3 774,89, 238,89, 14,29, 180,05, 723,29, 281,59, 302,20, 387,18, 147,10, 30,28, 134,99, 268,64, 213,55, 298,11, 140,94, 362,47, 154,97, 52,19, 198,48, 277,84, 122,52, 136,40, 107,97, 57,70, 46,75, 283,24, 490,87, 133,87, 528,52, 334,83, 147,94, 348,31

Súradnice uvažovaných miest:

Umiestnenie objektu závisí od vzdialenosti najkratšieho spojenia vzdušnou čiarou od ostatných uzlov. Táto vzdialenosť predstavuje dĺžku úsečky medzi bodom umiestnenia a bodom daného uzla.

Známym príkladom pre tento prípad je postavenie letiska medzi niekoľkými mestami s letiskami. Treba postaviť letisko tak, aby lietadlá mali najkratšie vzdialenosti do ostatných miest. V tomto prípade letisko možno vybudovať v ľubovoľnom bode priestoru. Situácia nie je determinovaná dopredu danými možnosťami ako je to v 2. prípade. Teoreticky nie je potrebné, ak na určené miesto nevedú komunikácie (ide o tak veľkú investíciu, že dobudovanie ciest nepredstavuje rozhodujúcu časť nákladov).

Meranie vzdialenosti

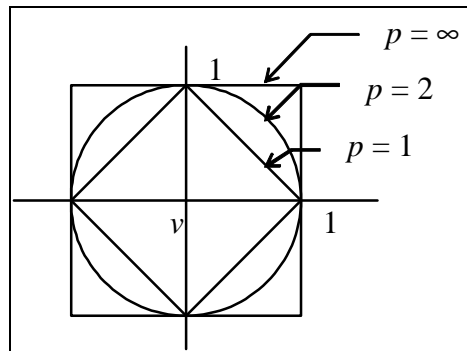
Na meranie vzdialenosti dvoch bodov $u, v \in \mathcal{R}^k$ budeme používať funkciu

$$d(u, v) = \| u - v \|,$$

kde pravá strana uvedeného výrazu vyjadruje určitú veľkosť (normu) vektora $u - v$. Budeme rozlišovať triedu L_p -metriek, kde

$$\|u - v\|_p = \left[\sum_{i=1}^k |u_i - v_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p = \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$$

kde p je parameter metriky.



Obr. 1: Obrisy L_p -metriek

Na obr. 1 sú na ilustráciu zobrazené geometrické miesta bodov, ktoré sú vzdialené jednu jednotku od bodu v podľa troch prvkov (pre $p = 1, 2, \infty$) triedy L_p -metriek.

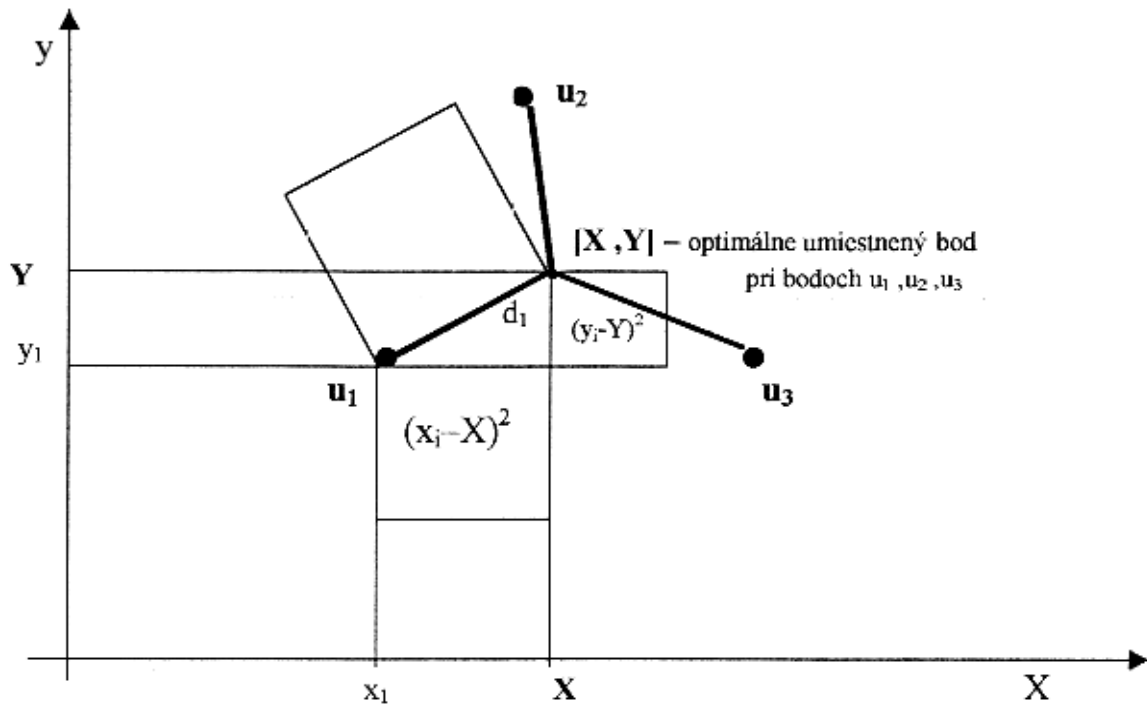
Pre naše potreby budeme používať L_2 – metriku. Označme súradnice hľadaného bodu X a Y súradnice jednotlivých cieľových uzlov x_i a y_i , kde $i = 1, 2, \dots, n$, n je počet daných uzlov.

Potom vzdialenosť medzi hľadaným bodom a daným i -tým uzlom je pri meraní vzdialeností pomocou L_2 - metriky.

$$\sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2} \quad (1)$$

Na obrázku 2 sú znázornené 3 objekty. Optimálne umiestnený objekt je v strede a má súradnice $[X, Y]$. Vzdialenosť d_i sa počíta podľa vzťahu (1), čo je vidno z obrázka. Treba minimalizovať všetky vzdialenosti d_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Avšak dané uzly nie sú pre postavenie letiska rovnako dôležité. Možno ich ohodnotiť váhami. V tomto prípade váhy uzlov môžu vyjadrovať, ako často treba do daných uzlov lietať (požiadavky týchto uzlov).

Toto riešenie udáva bod s celkovo najkratšou vzdialenosťou z určeného miesta do jednotlivých miest. Tento bod je znázornený na predchádzajúcom obrázku.



Obr. 2

Takto možno nájsť minimum zo súčtov, ktoré pozostávajú zo súčinov váh a vzdialeností.

$$\sum_{i=1}^n w_i \sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2} \quad (2)$$



Nájdené riešenie pre 32 obchodných miest bolo určené v oblasti medzi Nitrou a Topoľčanmi.

Váhy boli určené ako podiel predajného miest k sume celkového predaja firmy (sumárne údaje).

Častokrát býva riešenie predchádzajúcej úlohy iba východiskom pre riešenie problému určenia uzla v grafe, v ktorom je vhodné umiestniť distribučný sklad, pričom uvažujeme o doprave prostredníctvom cestnej siete. Riešením uvedeného problému lokalizácie skladu v euklidovskom priestore získame lokalitu, v okolí ktorej vyberieme miesta, na ktoré budeme aplikovať algoritmy sieťovej analýzy. Pre získanie východiskového riešenia možno použiť úlohu vyhľadávania ťažiska, ľahko riešiteľnú pomocou vzťahov:

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad Y = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Tieto vzťahy určujú obidve súradnice optimálneho bodu ako vážené aritmetické priemery súradníc daných uzlov.

Na základe údajov bolo vypočítané ťažisko medzi všetkými 32 mestami, v ktorých firma pôsobí v bode ležiacom medzi Zlatými Moravcami a Partizánskym. Súradnice uvedeného bodu boli vypočítané ako vážený priemer súradníc jednotlivých predajných miest. Váhy boli opäť určené ako podiel predajného miest k sume celkového predaja firmy.

Ťažisko je na nasledujúcom obrázku.



