Základy lineárnej algebry pre ekonometriu

Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková, Karol Szomolányi

Operácie s vektormi

Súčet vektorov

je definovaný ako súčet ich jednotlivých zložiek $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}$

Súčin skalára a vektora

je jednoduché vynásobenie každej zložky vektora skalárom $\alpha\mathbf{x}=\alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$

Skalárny súčin dvoch vektorov

je definovaný nasledovne $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$

Nezávislosť vektorov

Predpokladajme množinu n - rozmerných vektorov $\mathbf{x}^{\mathbf{1}}$, $\mathbf{x}^{\mathbf{2}}$, ... $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$, tie nazývame **nezávislými**, ak žiaden z nich nemôžeme zapísať ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov. Teda ak neexistuje žiadna množina nenulových skalárov $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m\}$ taká, že platí:

$$\alpha_1\mathbf{x}^{\mathbf{1}}+\alpha_2\mathbf{x}^{\mathbf{2}}+\ldots+\alpha_m\mathbf{x}^{\mathbf{m}}=\mathbf{0}$$

Norma (veľkosť) vektora

(Euklidovská) norma vektora (alebo jeho dĺžka) je definovaná: $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}=\sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$

Ortogonalita a ortonormalita

Dva vektory **x**, **y** nazývame ortogonálnymi, ak ich skalárny súčin je nulový $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0$

Zároveň cos uhla, ktorý také dva vektory zvierajú, je rovný 0.

Dva vektory **x** a **y** nazývame ortonormálnymi, ak sú ortogonálne a zároveň norma oboch týchto vektorov je rovná 1. Teda $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0 \;\wedge\; \|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{y}\|=1$

Báza vektorového priestoru

je systém vektorov, ktoré sú nezávislé a generujú m - rozmerný lineárny priestor (tzn. pomocou ich lineárnej kombinácie sa dajú vyjadriť všetky vektory tohto lineárneho priestoru)

Operácie s maticami

Súčet matíc

je definovaný ako súčet ich jednotlivých zložiek

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} & \cdots & x_{1n}+y_{1n} \\ x_{21}+y_{21} & x_{22}+y_{22} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1}+y_{m1} & x_{m2}+y_{m2} & \cdots & x_{mn}+y_{mn} \end{bmatrix}$$

Obidve matice musia mať rovnaký rozmer, teda musia byť konformné pre operáciu sčítania.

<u>Vlastnosti operácie súčet matíc</u>

(nech $\mathbf{X} = [x_{ij}]_{mxn}$, $\mathbf{Y} = [y_{ij}]_{mxn}$, $\mathbf{Z} = [z_{ij}]_{mxn}$, α, β sú skaláry):

1. $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ vtedy a len vtedy, keď pre všetky *i, j* platí $x_{ij} = y_{ij}$
2. $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \pm \mathbf{Y}$ vtedy a len vtedy, keď pre všetky *i, j* platí $z_{ij} = x_{ij} \pm y_{ij}$
3. $\alpha\mathbf{X} = [\alpha x_{ij}]_{mxn}$
4. $\alpha(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \alpha\mathbf{X} + \alpha\mathbf{Y}$
5. $\alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{X} = (\alpha + \beta)\mathbf{X}$
6. $\mathbf{X} \pm \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \pm \mathbf{X}$ platí komutatívny zákon (teda nezáleží na poradí)
7. $\mathbf{X} \pm (\mathbf{Y} \pm \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} \pm \mathbf{Y}) \pm \mathbf{Z}$ platí asociatívny zákon (môžu sa ľubovoľne združovať)

Súčin dvoch matíc

Nech $\mathbf{X} = [x_{ij}]_{mxn}$, $\mathbf{Y} = [y_{ij}]_{nxm}$,

$$\mathbf{XY}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} \end{bmatrix}=$$

potom

$$=\begin{bmatrix} x_{11}y_{11}+x_{12}y_{21}+\cdots+x_{1n}y_{n1} & \cdots & x_{11}y_{1m}+x_{12}y_{2m}+\cdots+x_{1n}y_{nm} \\ x_{21}y_{11}+x_{22}y_{21}+\cdots+x_{2n}y_{n1} & \cdots & x_{21}y_{1m}+x_{22}y_{2m}+\cdots+x_{2n}y_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1}y_{11}+x_{m2}y_{21}+\cdots+x_{mn}y_{n1} & \cdots & x_{m1}y_{1m}+x_{m2}y_{2m}+\cdots+x_{mn}y_{nm} \end{bmatrix}$$

Súčin **XY** má rozmer *m***m* (riadkov ako prvá matica a stĺpcov ako druhá matica v súčine).

Ak označíme $\mathbf{Z} = \mathbf{XY}$ (rozmer *m***m*) a $\mathbf{W} = \mathbf{YX}$ (rozmer *n***n*), tak obvykle $\mathbf{Z} \neq \mathbf{W}$.

Teda je rozdiel, či násobíme jednu maticu druhou sprava alebo zľava.

Všeobecne ak **X** = $[x_{ij}]_{rxn}$, **Y** = $[y_{ij}]_{nxs}$, potom súčin **XY** má rozmer *r***s* a v obrátenom poradí nie je možné matice násobiť, teda **YX** neexistuje.

Vlastnosti operácie súčin matíc

(nech **X** = $[x_{ij}]_{mxn}$, **Y** = $[y_{ij}]_{mxn}$, **Z** = $[z_{ij}]_{nxm}$):

1. **Z**(**X** + **Y**) = **ZX** + **ZY**
2. (**X** + **Y**)**Z** = **XZ** + **YZ**
3. ak **XZ** = **0**, potom nemusí platiť, že buď **X** = **0**, alebo **Z** = **0**
4. ak **ZX** = **ZY**, potom nemusí platiť **X** = **Y**

Príklad:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{XY} = \begin{bmatrix} 2.7 + 4.3 & 2.2 + 4.5 & 2.1 + 4.4 \\ 5.7 + 3.3 & 5.2 + 3.5 & 5.1 + 3.4 \\ 3.7 + 6.3 & 3.2 + 6.5 & 3.1 + 6.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 24 & 18 \\ 44 & 25 & 17 \\ 39 & 36 & 27 \end{bmatrix}$$

Kroneckerov súčin matíc

Nech **A** je matica rozmeru m*p a **B** je matica rozmeru n*q, potom Kroneckerov súčin matíc **A** a **B** má rozmer m.n*p.q, označuje sa **A** ⊗ **B** a platí, že

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

teda, celá matica stojaca vpravo je postupne násobená každým prvkom matice stojacej vľavo.

<u>Vlastnosti Kroneckerovho súčinu matíc</u>

1. **A** ⊗ **B** ≠ **B** ⊗ **A**
2. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$
3. ak existujú $\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{B}^{-1}$ potom $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$
4. (**A** ⊗ **B**) (**C** ⊗ **D**) = **AC** ⊗ **BD**

Determinant matice

Determinant matice je pravidlo, ktoré každej <u>štvorcovej</u> matici priradí konkrétnu hodnotu.

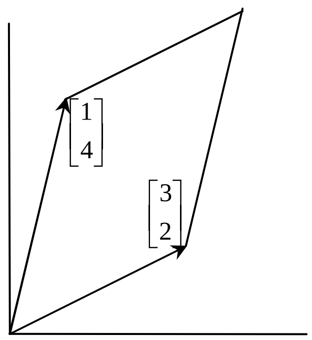
Pre všeobecnú maticu rozmeru 2*2, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$, determinant $= \det \mathbf{X} = |\mathbf{X}| = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$

Pre maticu n*n je determinantom súčet súčinov všetkých prvkov ľubovoľného riadku alebo stĺpca s ich algebraickými doplnkami (**algebraický doplnok**, tiež **kofaktor** k $x_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{X}_{ij}|$, kde $\mathbf{X}_{ij}$ je matica **X** bez i-teho riadku a j-teho stĺpca a jej determinant $|\mathbf{X}_{ij}|$ je **prvý minor X**).

Teda napr. pre všeobecnú maticu rozmeru 3*3, $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}$, sa determinant vypočíta nasledovne $|\mathbf{Y}| = (-1)^{1+1} y_{11} \begin{vmatrix} y_{22} & y_{23} \\ y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} y_{12} \begin{vmatrix} y_{21} & y_{23} \\ y_{31} & y_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} y_{13} \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{vmatrix}$, alebo podľa pravidla $|\mathbf{Y}| = y_{11}y_{22}y_{33} + y_{21}y_{32}y_{13} + y_{31}y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}y_{31} - y_{11}y_{23}y_{32} - y_{12}y_{21}y_{33}$.

Geometrická interpretácia determinantu

Nech matica **Z** je tvorená dvoma vektormi **x** a **y**, teda **Z**=[**x** | **y**], pre konkrétny prípad nech $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, potom determinant matice **Z** vyjadruje veľkosť plochy vymedzenej vektormi **x** a **y**, pre náš príklad $|\mathbf{Z}| = 10$ a graf vyzerá nasledovne:



Vlastnosti determinantov

1. $|\mathbf{Z}| = |\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}|$ - determinant transponovanej matice sa rovná determinantu pôvodnej matice
2. Ak **Y** získame vzájomným vymenením pozície 2 riadkov (stĺpcov) v **X**, potom $|\mathbf{X}| = -|\mathbf{Y}|$
3. Ak riadky (stĺpce) matice **X** sú lineárne závislé, potom $|\mathbf{X}| = 0$ a matica **X** je singulárna
4. Ak **Y** získame vynásobením jedného riadku (stĺpca) **X** skalárom α, potom $|\mathbf{Y}| = \alpha|\mathbf{X}|$
5. $|\mathbf{XY}| = |\mathbf{X}||\mathbf{Y}|$ - determinant súčinu dvoch matíc je súčinom determinantov týchto matíc

Transpozícia matice

Transponovanou maticou k matici **X** = $[x_{ij}]$ nazývame maticu $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$, pre ktorú platí $\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = [x_{ji}]$.

Príklad:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Vlastnosti transponovanch matíc

1. $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^{\mathrm{T}} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}$ - transpozícia súčtu matíc sa rovná súčtu transponovaných matíc
2. $(\mathbf{XY})^{\mathrm{T}} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ - transpozícia súčinu matíc sa rovná súčinu transp. matíc v opačnom poradí

Hodnosť matice

Riadkovou hodnosťou matice **X** nazývame hodnotu ρ maximálneho počtu lineárne nezávislých riadkových vektorov v matici **X** (to znamená, že každý ďalší riadok, ak existuje, je lineárnou kombináciou ostatných riadkov). Analógia platí pre stĺpcovú hodnosť a stĺpce.

<u>Vlastnosti hodnosti matice</u>

1. riadková hodnosť = stĺpcovej hodnosti
2. $\rho(\mathbf{XY}) \le \rho(\mathbf{X})\ a\ \rho(\mathbf{Y})$
3. $\rho(\mathbf{X}) + \rho(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}) = \rho(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}) = \rho(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})$
4. $\rho(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) \le \rho(\mathbf{X}) + \rho(\mathbf{Y})$
5. ak |**X**| = 0, potom $\rho(\mathbf{X}) < n$, pre **X** = $[x_{ij}]_{nxn}$

Systémy lineárnych rovníc

Predpokladajme <u>lineárny homogénny systém</u> rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{A}_{mxn}$ a $\mathbf{x}_{nx1}$, potom nutnou a postačujúcou podmienkou, aby systém mal netriviálne (≠0) riešenie, je $\rho(\mathbf{A}) < n$.

Toto nenulové riešenie systému $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ vymedzuje lineárny podpriestor. Ak S je podpriestor riešení systému, potom jeho dimenzia je rovná $n - \rho(\mathbf{A})$. Pri použití normalizačného pravidla, keď dĺžka vektora **x** je rovná 1, je nutnou a postačujúcou podmienkou $\rho(\mathbf{A}) = n - 1$.

Predpokladajme <u>lineárny nehomogénny systém</u> rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}_{mxn}$, $\mathbf{x}_{nx1}$, $\mathbf{b}_{mx1}$ a **b** ≠ **0**. Systém má riešenie, len ak hodnosť rozšírenej matice systému sa rovná hodnosti matice systému, teda $\rho(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \rho(\mathbf{A})$ a riešenie je jednoznačné len, ak platí $\rho(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \rho(\mathbf{A}) = n < m$.

Inverzia matice

Štvorcová matica $\mathbf{X}_{nxn}$ má najviac jednu inverziu, ak táto existuje a inverzia je jednoznačná.
Ak **X** je nesingulárna matica, potom inverzná matica k matici **X,** označovaná $\mathbf{X}^{-1}$, sa vypočíta ako súčin prevrátenej hodnoty determinantu a adjungovanje matice, teda $\mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{X}|} adj(\mathbf{X})$.

adj(**X**) je adjungovaná matica, teda matica transponovaných algebraických doplnkov.

Príklad:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ potom } |\mathbf{X}| = (-1)^2 2(0-6) + (-1)^3 1(1-12) + (-1)^4 3(2-0) = -12 + 11 + 6 = 5$$

$$\text{matica algebraických doplnkov}\left[\mathbf{X}_{ij}\right]=\begin{bmatrix}(-1)^2\begin{bmatrix}0&3\\2&1\end{bmatrix}&(-1)^3\begin{bmatrix}1&3\\4&1\end{bmatrix}&(-1)^4\begin{bmatrix}1&0\\4&2\end{bmatrix}\\(-1)^3\begin{bmatrix}1&3\\2&1\end{bmatrix}&(-1)^4\begin{bmatrix}2&3\\4&1\end{bmatrix}&(-1)^5\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}\\(-1)^4\begin{bmatrix}1&3\\0&3\end{bmatrix}&(-1)^5\begin{bmatrix}2&3\\1&3\end{bmatrix}&(-1)^6\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&11&2\\5&-10&0\\3&-3&-1\end{bmatrix}$$

$$adj(\mathbf{X})=\left[\mathbf{X}_{ij}\right]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-6&5&3\\11&-10&-3\\2&0&-1\end{bmatrix}\text{ a teda }\mathbf{X}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{X}|}adj(\mathbf{X})=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-6&5&3\\11&-10&-3\\2&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6/5&1&3/5\\11/5&-2&-3/5\\2/5&0&-1/5\end{bmatrix}$$

Vlastnosti inverzie matice

1. $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}=\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}=\mathbf{I}$ - súčin inverznej a pôvodnej matice sa rovná jednotkovej matici (matici na ktorej okrem hlavnej diagonály, kde sú jednotky, sú samé nuly) – majú rovnaký rozmer
2. $\left(\mathbf{X}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{X}$ - inverzia inverznej matice je pôvodná matica
3. $(\mathbf{XY})^{-1}=\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}^{-1}$ - inverzia súčinu matíc je súčinom inverzných matíc v opačnom poradí
4. inverzia diagonálnej matice je diagonálnou maticou obrátených hodnôt pôvodných prvkov
5. $\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\mathbf{X}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$ inverzia transponovanej matice **X** je transpozíciou inverznej matice k **X**

Stopa matice

Stopa matice $\mathbf{X}_{nxn}$ je súčet jej diagonálnych prvkov, teda $tr\mathbf{X}=\sum_{i=1}^{n}x_{ii}$.

Vlastnosti stopy matice

1. $tr\ k\mathbf{X}=k\,.\,tr\mathbf{X}$, kde k je skalár – teda skalárnu hodnotu môžeme "vyňať pred stopu"
2. $tr(\mathbf{XY})=tr(\mathbf{YX})$ - stopa súčinu matíc je rovnaká bez ohľadu na ich poradie
3. $tr(\mathbf{I}_n)=n$ - stopa jednotkovej matice sa rovná jej rozmeru (počtu riadkov alebo stĺpcov)

Niektoré typy matíc

Nulová matica

Matica, ktorej všetky prvky sú nuly, sa nazýva nulová matica a označuje sa **0**.

Diagonálna matica

Štvorcová matica **X**, ktorej všetky prvky okrem hlavnej diagonály sú nulové (x_{ij} = 0, keď i≠j), sa nazýva diagonálna matica a označuje sa obvykle strieškou $\hat{\mathbf{X}},\hat{\mathbf{Y}}...$.

Jednotková matica

Jednotková matica je diagonálna matica, ktorej hlavnú diagonálu tvoria samé jednotky a označuje sa **I** (niekde aj **E**).

Dolná trojuholníková matica

Štvorcová matica **X**, ktorej všetky prvky nad hlavnou diagonálou sú nulové (x_{ij} = 0, keď i<j), sa nazýva dolná trojuholníková matica. Analogicky, ak všetky x_{ij} = 0, keď i>j, ide o hornú trojuholníkovú maticu. Oba typy sú nesingulárne matice.

Symetrická matica

Štvorcová matica **X**, pre ktorej všetky prvky platí $x_{ij} = x_{ji}$, sa nazýva symetrická matica.

Opačná matica

Maticu **–X** = $[-x_{ij}]_{mxn}$ (ktorú dostaneme odčítaním **X** od **0**) nazývame opačnou maticou k **X**.

Kososymetrická matica

Štvorcová matica **X**, pre ktorej všetky nediagonálne prvky (i≠j) platí $x_{ij} = -x_{ji}$, sa nazýva kososymetrická matica.

Bloková matica

Matica, ktorej prvky sú matice, sa nazýva bloková matica (Pozn.: každá matica je bloková).

Idempotentná matica

Matica, pre ktorú platí **XX** = **X** (označované aj $\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}$), sa nazýva idempotentná matica.

Vlastnosti idempotentnej matice

1. ak **X** je idempotentná a nesingulárna, potom je **X** = **I** (jednotková matica)
2. všetky idempotentné matice, ktoré sú singulárne, sú pozitívne semidefinitné
3. $\rho(\mathbf{X}) = tr(\mathbf{X})$ - hodnosť idempotentnej matice sa rovná jej stope
4. ak je **X** idempotentná matica a jej hodnosť je *r*, potom existuje ortogonálna matica **P** taká, že $\mathbf{P}^T\mathbf{X}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I_r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Príklad: Matica $\mathbf{I} - (1/n)\mathbf{i}\mathbf{i}^T$, kde **i** je n - rozmerný vektor jednotiek, je idempotentná.

Elementárne maticové operácie

1. Nech $\mathbf{I_{ij}}$ je jednotková matica s vymenenými pozíciami i-teho a j-teho riadku - **permutujúca**

Násobenie ľubovoľnej matice **X** zľava maticou $\mathbf{I_{ij}}$ vymení v **X** pozíciu i-teho a j-teho riadku.

Násobenie ľubovoľnej matice **X** sprava maticou $\mathbf{I_{ij}}$ vymení v **X** pozíciu i-teho a j-teho stĺpca.

2. Označme $\mathbf{\Delta_k}(\lambda)$ jednotkovú maticu s k-tou jednotkou nahradenou číslom λ.

Násobenie ľubovoľnej matice **X** zľava maticou $\mathbf{\Delta_k}(\lambda)$ vynásobí k-ty riadok **X** číslom λ.

Násobenie ľubovoľnej matice **X** sprava maticou $\mathbf{\Delta_k}(\lambda)$ vynásobí k-ty stĺpec **X** číslom λ.

3. Označme $\mathbf{P_{ij}}(\lambda)$ jednotkovú maticu s prvkom na pozícii *i,j* nahradeným číslom λ.

Násobenie matice **X** zľava maticou $\mathbf{P_{ij}}(\lambda)$ pripočíta λ násobok j-teho riadku **X** k i-temu riadku.

Násobenie matice **X** sprava maticou $\mathbf{P_{ij}}(\lambda)$ pripočíta λ násobok i-teho stĺpca **X** k j-temu stĺpcu.

Príklad:

Nech $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$, $\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}2&4&6\\2&4&6\\2&4&6\end{bmatrix}$

Podľa označenia potom $\mathbf{I}_{1,2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{\Delta}_3(2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$, $\mathbf{P}_{2,1}(3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

Potom $\mathbf{I_{1,2}X}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&2\\1&1&1\\3&3&3\end{bmatrix}$ $\mathbf{YI_{1,2}}=\begin{bmatrix}2&4&6\\2&4&6\\2&4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&6\\4&2&6\\4&2&6\end{bmatrix}$

$$\mathbf{\Delta}_3(2)\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\6&6&6\end{bmatrix}\quad \mathbf{Y\Delta}_3(2)=\begin{bmatrix}2&4&6\\2&4&6\\2&4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&12\\2&4&12\\2&4&12\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{2,1}(3)\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\5&5&5\\3&3&3\end{bmatrix}\quad \mathbf{YP}_{2,1}(3)=\begin{bmatrix}2&4&6\\2&4&6\\2&4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&4&6\\14&4&6\\14&4&6\end{bmatrix}$$

Úpravy matice

Pre každú štvorcovú maticu **A** existuje nesingulárna matica **B** taká, že súčin matíc **BA** je usporiadaný v nasledovnom stupňovitom tvare:

a) každý riadok **BA** tvoria samé nuly, alebo jednotka predchádzaná samými nulami
b) každý stĺpec, ktorý obsahuje jednotku, ktorá je prvá vo svojom riadku, tvoria okrem nej samé nuly

Príklad:

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&2&6\\4&3&1\end{bmatrix}$, vidíme, že hodnosť matice je rovná 2 (lebo 2. riadok je dvojnásobok 1.)

$$\mathbf{\Delta}_2(1/2)\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&3\\2&1&3\\4&3&1\end{bmatrix}=\mathbf{B},\quad \mathbf{P}_{2,1}(-1)\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&0&0\\4&3&1\end{bmatrix}=\mathbf{C},\quad \mathbf{P}_{3,1}(-2)\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&0&0\\0&1&-5\end{bmatrix}=\mathbf{D},$$

$\mathbf{P}_{1,3}(-1)\mathbf{D}=\begin{bmatrix}2&0&8\\0&0&0\\0&1&-5\end{bmatrix}=\mathbf{E}$, $\mathbf{\Delta}_1(1/2)\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&0&4\\0&0&0\\0&1&-5\end{bmatrix}=\mathbf{F}$, čo je želaný stupňovitý tvar.

Hermitovský kanonický tvar matice

Pre každú štvorcovú maticu **A** existuje nesingulárna matica **C**, že pre súčin matíc **H** = **CA** platí:

a) **H** je horná trojuholníková matica

b) **H** je idempotentná matica

c) diagonálny prvok **H** je 1 alebo 0

d) ak je diagonálny prvok 1, stĺpec v ktorom sa nachádza tvoria okrem nej samé nuly

e) ak je diagonálny prvok 0, riadok v ktorom sa nachádza tvoria okrem nej samé nuly

Príklad (pokračovanie):

Ak chceme upraviť maticu **A** z predchádzajúceho príkladu, stačí pokračovať v úpravách

$\mathbf{I}_{2,3}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ = **G**, čo je matica v Hermitovskom kanonickom tvare.

Diagonálna redukcia matice

Pre každú maticu **A** rozmeru m*n s hodnosťou r existujú nesingulárne matice $\mathbf{B}_{m*m}$ a $\mathbf{C}_{n*n}$, že pre súčin matíc **BAC** platí $\mathbf{BAC} = \begin{bmatrix} \mathbf{I_r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Príklad (pokračovanie):

Ak chceme upraviť maticu **G** z predchádzajúceho príkladu, stačí pokračovať v úpravách

$\mathbf{GP}_{3,1}(-4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ = **H**, $\mathbf{HP}_{2,1}(-4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ = **J**, čo je želaný tvar.

Redukcia symetrickej matice

Pre každú symetrickú maticu **A** rozmeru m*m s hodnosťou r existuje nesingulárna matica **B**, že súčin $\mathbf{C} = \mathbf{BAB}^{\mathrm{T}}$ je diagonálna matica. Ak $r=m$ potom $c_{ii} \neq 0$, pre $\forall$i, ak $r<m$ potom $m–r$ z $c_{ii} = 0$.

Kvadratické formy

Nech **x** je n rozmerný vektor a **A** je štvorcová matica n*n, potom kvadratickou formou nazývame súčin v tvare $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$.

Definitnosť kvadratickej formy

Kvadratická forma $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}$ a jej zodpovedajúca matica **A** sa nazýva pozitívne definitná, ak platí

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} > 0 \qquad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Kvadratická forma $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ a jej zodpovedajúca matica **A** sa nazýva pozitívne semidefinitná, ak platí
$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0 \qquad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$
Kvadratická forma $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ a jej zodpovedajúca matica **A** sa nazýva negatívne definitná, ak platí
$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} < 0 \qquad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$
Kvadratická forma $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ a jej zodpovedajúca matica **A** sa nazýva negatívne semidefinitná, ak platí
$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0 \qquad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$
Kvadratická forma $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ a jej zodpovedajúca matica **A** sa nazýva indefinitná, ak existujú navzájom rôzne nenulové vektory **x** a **y** a platí
$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0,\ \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} < 0$$
Ak **A** je pozitívne definitná matica, potom súčin $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{B}$ je tiež pozitívne definitný, ak **B** je nesingulárna matica, teda determinant matice **B** nie je nulový.

Každá kvadratická forma sa dá pomocou nesingulárnej transformácie upraviť na tvar pozostávajúci len z kvadratických členov. Teda ku každej kvadratickej forme existuje nesingulárna matica **B** taká, že $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = d_1 y_1^2 + d_2 y_{21}^2 + \ldots + d_n y_{n1}^2$, kde $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$.

Ak **A** je pozitívne definitná matica, potom existuje horná trojuholníková matica **T** (pre ktorú platí $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$) taká, že pre kvadratickú formu platí $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{T}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

Teda existuje horná trojuholníková matica **T** taká, že $\left(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}_{\mathbf{n}}$ alebo $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}$, čo je známe pod názvom trojuholníková odmocnina matice **A**.

Charakteristické korene a vektory

Nech **A** je n rozmerná nenulová štvorcová matica, **x** <u>je n rozmerný vektor rôzny od **0**</u> taký, že platí $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 1$ a λ je skalár, ak platí $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ alebo inak zapísané $\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, potom musia byť stĺpce (**A** – λ**I**) lineárne závislé, teda determinant (**A** – λ**I**) = 0.

Rozpísaním determinantu dostaneme polynóm v tvare $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda^1 + a_0 = 0$, jeho korene λ_i sa nazývajú charakteristickými koreňmi (alebo vlastnými číslami) matice **A**.

Ak λ_i je charakteristický koreň a $\mathbf{x_i}$ je nenulový vektor, ktorý zodpovedá tomuto koreňu, teda platí $\mathbf{A}\mathbf{x_i} = \lambda_i\mathbf{x_i}$, potom vektor $\mathbf{x_i}$ nazývame charakteristickým vektorom zodpovedajúcim koreňu λ_i (každému koreňu zodpovedá práve jeden charakteristický vektor).

Vlastnosti matíc a ich charakteristických koreňov a vektorov

Veta 1: Nech **A** je n rozmerná symetrická matica, **C** je matica tvorená jej charakteristickými vektormi, ktoré zodpovedajú charakteristickým koreňom usporiadaným v matici **Λ** (veľké λ) diagonálne teda $\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$, potom platí $\mathbf{CAC} = \mathbf{\Lambda}$.

Veta 2: Nech **A** je n rozmerná štvorcová matica, potom existuje n komplexných čísel vyhovujúcich podmienke, aby determinant ($\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$) bol nulový.

Veta 3: Ak n rozmerná (štvorcová) matica **A** má najmenej jeden charakteristický koreň nulový, potom je singulárna.

Veta 4: Nech **A** je n rozmerná matica a **C** je matica tvorená jej charakteristickými vektormi, potom matice **A**, $\mathbf{C}^{-1}$, **AC**, $\mathbf{CAC}^{-1}$ majú všetky rovnakú množinu charakteristických koreňov.

Veta 5: Nech **A** je n rozmerná matica, potom matice **A** a $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ majú rovnaké charakteristické korene, ale nemusia mať rovnaké charakteristické vektory.

Veta 6: Nech **A** je n rozmerná matica, ak λ je charakteristickým koreňom, potom 1/λ je charakteristickým koreňom matice $\mathbf{A}^{-1}$.

Veta 7: Nech **A** je n rozmerná trojuholníková matica, potom jej charakteristické korene sú jej diagonálne prvky. (Špeciálnym prípadom platnosti je aj diagonálna matica.)

Veta 8: Nech **A** je n rozmerná <u>symetrická</u> matica, potom:

a) jej charakteristické korene sú reálne
b) každý pár charakteristických vektorov je ortogonálny (⊥), ak sa ich korene nerovnajú
c) ak **A** je pozitívne definitná, potom všetky jej charakteristické korene sú kladné
d) ak **A** je pozitívne semidefinitná, potom všetky jej charakteristické korene sú nezáporné

Veta 9: Nech **A** je n rozmerná <u>symetrická pozitívne definitná</u> matica, potom:

a) determinant matice **A** je rovný súčinu všetkých jej charakteristických koreňov
b) stopa matice **A** je rovná súčtu všetkých jej charakteristických koreňov
c) charakteristické korene matice **I – A** sú rovné $1 - \lambda_i$

Veta 10: Nech **A** je n rozmerná <u>symetrická idempotentná</u> matica, potom:

a) jej nenulové charakteristické korene sú rovné 1
b) jej stopa sa rovná jej hodnosti

Kanonická redukcia symetrickej matice

Nech **A** je n rozmerná symetrická matica, potom existuje ortogonálna matica **P** taká, že platí $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{AP} = \mathbf{\Lambda}$ a naopak $\mathbf{A} = \mathbf{P\Lambda P}^{\mathrm{T}} = \lambda_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1^{\mathrm{T}} + \lambda_2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2^{\mathrm{T}} + ... + \lambda_n\mathbf{P}_n\mathbf{P}_n^{\mathrm{T}}$.

Nech **A** je n rozmerná symetrická matica, ďalej nech **B** je n rozmerná symetrická matica, potom korene rovnice determinantu $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}| = 0$ sú koreňmi súčinu $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$ kde $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}$ a existuje ortogonálna matica **R** taká, že $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}$ a tiež $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{R} = \mathbf{I}_{\mathbf{n}}$.

Extrémy kvadratických foriem

Nech **A** je n rozmerná symetrická matica, zoraďme jej charakteristické korene od najväčšieho po najmenší, teda od λ_1 po λ_n a nech pre vektor **x** platí $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 1$, potom extrémy kvadratickej formy $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ sú práve korene λ_1 (maximum) a λ_n (minimum).

V prípade, že neplatí $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 1$ sú korene λ_1 a λ_n extrémami kvadratickej formy $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ predelenej skalárnym súčinom $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$.

Derivácie funkcií v maticovom tvare

Derivácia skalárneho súčinu vektorov

Nech $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$ a $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$, potom každú lineárnu funkciu n premenných (bez absolútneho člena) $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(\mathbf{x})$ môžeme zapísať v tvare skalárneho súčinu

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$$

Parciálna derivácia funkcie $\dfrac{\partial f(x_1, x_2 \ldots x_n)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \dfrac{\partial(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)}{\partial x_1} = a_1$

Analogicky $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = a_2$ ... až $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} = a_n$.

Vektorovo zapísané
$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}$$

Preto platí $\dfrac{\partial \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a} = \dfrac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}}$, teda derivácia skalárneho súčinu podľa jedného vektora sa rovná druhému vektoru. Ak derivujeme podľa stĺpcového vektora výsledkom je stĺpcový vektor.

Derivácia kvadratickej formy

Nech $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, potom každú kvadratickú funkciu n premenných (bez lineárnych a absolútneho člena) $g(x_1, x_2, \ldots x_n) = g(\mathbf{x})$ môžeme zapísať v tvare kvadratickej formy

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = [x_1 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j =$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + \ldots$$

Parciálna derivácia funkcie $\dfrac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + (a_{12} + a_{21})x_2 + (a_{13} + a_{31})x_3 + \ldots + (a_{1n} + a_{n1})x_n$

analogicky $\dfrac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_2} = (a_{12} + a_{21})x_1 + 2a_{22}x_2 + (a_{23} + a_{32})x_3 + \ldots + (a_{2n} + a_{n2})x_n$

až $\dfrac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_n} = (a_{1n} + a_{n1})x_1 + (a_{2n} + a_{n2})x_2 + (a_{3n} + a_{n3})x_3 + \ldots + 2a_{nn}x_n$

Pre jednoznačnosť definovania kvadratickej formy sa prijíma predpoklad o matici kvadratickej formy <u>**A**, že je symetrická</u>, teda že platí $a_{ij} = a_{ji}$.

Potom $g(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots$

a pre parciálne derivácie platí $\dfrac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_n$

a analogicky až $\dfrac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_n} = 2a_{1n}x_1 + 2a_{2n}x_2 + 2a_{3n}x_3 + \ldots + 2a_{nn}x_n$

Vektorovo zapísané $\dfrac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$

ale $\dfrac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = 2\,[a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \quad \cdots \quad a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n] = 2\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$

Preto platí $\dfrac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$, teda derivácia kvadratickej formy podľa stĺpcového vektora je stĺpcovým vektorom dvojnásobku súčinu matice a vektora, ale derivácia kvadratickej formy podľa riadkového vektora $\dfrac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = 2\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ je riadkovým vektorom 2x súčinu vektora a matice.

Zoznam literatúry:

[1] DHRYMES, P. J.: *Mathematics for Econometrics*. 3rd edition. Springer Verlach 2000.

[2] LARSON, R. – FALVO, D. C.: *Elementary Linear Algebra*. 4th edition. Houghton Mifflin Company 1999.

[3] MEYER, C. D.: Matrix *Analysis and Applied Linear Algebra Book and Solutions Manual*. SIAM 2001.

[4] SIMON, C. P.– BLUME, L. E.: *Mathematics for Economists*. W.W. Norton & Co.1994.