Techniky pre výpočet hranice efektívneho portfólia

Andrea Furková

V rámci optimálneho investičného rozhodovania vzniká dôležitá otázka. Ktoré zo všetkých portfólií zostavených z cenných papierov, do ktorých chce investor investovať, je to pravé? Investor musí medzi veľkým množstvom všetkých možných portfólií uskutočniť akýsi užší výber tých, ktoré sa budú uchádzať o jeho konečnú priazeň. Do tohto užšieho výberu patria všetky efektívne portfóliá. Za efektívne portfólio sa považuje také, ktoré má menšie riziko než všetky ostatné portfóliá s porovnateľným (rovnakým) očakávaným výnosom.

Pri hľadaní množiny efektívnych portfólií predpokladáme, že môžu nastať štyri možné prípady:

1. krátke predaje[1] sú povolené a požičiavanie a požičiavanie si za bezrizikovú úrokovú mieru je možné,
2. krátke predaje sú povolené, ale požičiavanie a požičiavanie si za bezrizikovú úrokovú mieru nie je možné,
3. krátke predaje nie sú povolené, ale požičiavanie a požičiavanie si za bezrizikovú úrokovú mieru existuje,
4. ani krátke predaje, ani požičiavanie a požičiavanie si za bezrizikovú úrokovú mieru nie je povolené.

Krátke predaje sú povolené a požičiavanie a požičiavanie si za bezrizikovú úrokovú mieru je možné

Odvodenie efektívnej množiny portfólia, keď krátke predaje sú povolené a existuje bezriziková úroková miera, ktorá je zároveň sadzbou pre vypožičanie aj vypožičanie si, je najjednoduchší prípad, o ktorom môžeme uvažovať. Vieme, že existencia požičiavania a požičiavania si za bezrizikovú úrokovú mieru spôsobuje, že existuje jednoduché portfólio zložené z rizikových aktív, ktoré je preferované pred všetkými ostatnými portfóliami. Navyše v priestore očakávaný výnos – štandardná odchýlka, je toto portfólio vykreslené na polpriamke, ktorá spája bezrizikové aktívum a rizikové portfólio, ktoré leží najďalej v smere

[1] Krátky predaj znamená, že sa predáva vypožičané aktívum, ktorá sa vracia tým spôsobom, že sa v okamihu vrátenia opätovne kúpi na trhu. Na krátkom predaji teda investor získa, ak hodnota aktíva medzi okamihom jeho vypožičania a vrátenia klesla, a naopak, stratí, ak sa aktívum zhodnotilo. Krátky predaj znamená zápornú váhu určitého aktíva a investor teda zaujíma pri tomto aktíve krátku pozíciu.

proti pohybu hodinových ručičiek. Napr. v grafe č. 1 (Príloha), portfólio na polpriamke R_F-B je preferované pred všetkými ostatnými portfóliami zloženými z rizikových aktív. Hranica efektívneho portfólia je celková dĺžka polpriamky medzi R_F a B. Rôzne body pozdĺž polpriamky R_F-B reprezentujú rozličné množstvá požičiavania alebo požičiavnia si v kombinácii s optimálnym portfóliom zloženého z rizikových aktív (portfólio B). Ekvivalentný spôsob identifikovania polpriamky R_F-B je, že pripustíme, že je to polpriamka s najväčším sklonom. Pripomeňme si, že sklon priamky spájajúcej bezrizikové aktívum a rizikové portfólio je očakávaný výnos portfólia mínus bezriziková úroková miera, a to celé vydelené štandardnou odchýlkou výnosov portólia. Preto efektívna množina je ovplyvňovaná nájdením takého portfólia s najvyšším pomerom dodatočného výnosu (očakávaný výnos mínus bezriziková úroková miera) k štandardnej odchýlke, ktoré spĺňa ohraničujúce podmienky, t. j. suma podielov investovaných do aktív sa rovná jednej. V rovnicovej forme to môžeme zapísať nasledovne:

Maximalizácia účelovej funkcie v tvare:

$$\theta = \frac{\overline{R}_P - R_F}{\sigma_P}$$

vzhľadom na ohraničenie:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

Toto je maximalizačný problém s ohraničeniami. Existujú štandardné spôsoby na riešenie takéhoto problému, napr. môžeme použiť metódu Lagrangeových multiplikátorov. Alternatívnym spôsobom výpočtu je, že ohraničenie môže byť začlenené do účelovej funkcie, ktorá sa následne maximalizuje ako úloha bez ohraničujúcich podmienok. Táto procedúra je nasledovná: R_F môžeme napísať ako R_F vynásobené jednotkou, z čoho vyplýva:

$$R_F = 1R_F = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) R_F = \sum_{i=1}^{N} X_i R_F$$

Ak urobíme takúto substitúciu v účelovej funkcii (za predpokladu nemennosti očakávaného výnosu a štandardnej odchýlky výnosu) vo všeobecnej forme prináša výnos:

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i \left(\overline{R}_i - R_F\right)}{\left[\sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}\right]^{1/2}}$$

Vyššie stanovený problém je problémom jednoduchej maximalizácie a ako taký môže byť riešený štandardnými výpočtovými metódami. Tieto metódy ukazujú, že na nájdenie maxima funkcie je nutné urobiť jej derivácie, rešpektujúc každú premennú a položiť derivácie rovné nule. Potom riešenie tohto maximalizačného problému zahŕňa nájdenie riešenia nasledujúceho systému simultánnych rovníc:

1. $\frac{d\theta}{d X_1} = 0$

2. $\frac{d\theta}{d X_2} = 0$

3. $\frac{d\theta}{d X_3} = 0$

.

.

.

N. $\frac{d\theta}{d X_N} = 0$

Je dokázané, že platí:

$$\frac{d\theta}{dX_i} = -\left(\lambda X_1\sigma_{1i} + \lambda X_2\sigma_{2i} + \lambda X_3\sigma_{3i} + \dots + \lambda X_i\sigma_{i^2} + \dots + \lambda X_N\sigma_{N-1i} + \lambda X_N\sigma_{Ni}\right) + \overline{R}_i - R_F = 0$$

kde λ je konštanta (je rovná $\frac{\left(\overline{R}_P - R_F\right)}{\sigma_P^2}$). Matematický trik umožňuje užitočnú modifikáciu derivácie. Môžeme si všimnúť, že každé X_k je násobené konštantou λ. Definujeme novú premennú $Z_k = \lambda * X_k$. X_k sú časti investované do každého cenného papiera a Z_k sú proporcionálne k týmto častiam. Nahradením Z_k za $\lambda * X_k$ zjednodušujeme formuláciu. Na nájdenie riešenia X_k po získaní Z_k, investor delí každé Z_k sumou Z_k. Ak nahradíme Z_k vzťahom $\lambda * X_k$ a premiestnime variančno – kovariančné vzťahy na pravú stranu rovnice, dostaneme vzťah:

$$\overline{R}_i - R_F = Z_1\sigma_{1i} + Z_2\sigma_{2i} + \dots + Z_1\sigma_i^2 + \dots + Z_{N-1}\sigma_{N-1i} + Z_N\sigma_{Ni}$$

Máme takúto jednu rovnicu pre každú hodnotu i. Potom riešenie zahŕňa riešenie nasledujúceho systému simultánnych rovníc:

$$\begin{aligned}
\overline{R}_1 - R_F &= Z_1\sigma_1^2 + Z_2\sigma_{12} + Z_3\sigma_{13} + \dots + Z_N\sigma_{1N} \\
\overline{R}_2 - R_F &= Z_1\sigma_{12} + Z_2\sigma_2^2 + Z_3\sigma_{23} + \dots + Z_N\sigma_{2N} \\
\overline{R}_3 - R_F &= Z_1\sigma_{13} + Z_2\sigma_{23} + Z_3\sigma_3^2 + \dots + Z_N\sigma_{3N} \qquad (1) \\
&\;\;\vdots \\
\overline{R}_N - R_F &= Z_1\sigma_{1N} + Z_2\sigma_{2N} + Z_3\sigma_{3N} + \dots + Z_N\sigma_N^2
\end{aligned}$$

Premenné Z sú proporcionálne k optimálnej sume investovanej do každého cenného papiera. Na určenie optimálneho množstva určeného na investovanie, ako prvé riešime rovnice pre premenné Z. Môžeme si všimnúť, že toto nepredstavuje problém. Máme N rovníc (jednu pre každý cenný papier) a N neznámych (Z_k pre každý cenný papier). Potom optimálny pomer investovania do akcií k je X_k, kde

$$X_k = Z_k \Big/ \sum_{i=1}^{N} Z_i$$

Toto ukážeme na príklade. Uvažujeme o troch cenných papieroch: Colonel Motors s očakávaným výnosom 14% a štandardnou odchýlkou výnosov 6%, Separated Edison s priemerným výnosom 8% a štandardnou odchýlkou výnosov 3% a Unique Oil so stredným výnosom 20% a štandardnou odchýlkou výnosov 15%.

Ďalej predpokladáme, že korelačný koeficient medzi Colonel Motors a Separated Edison je 0,5; medzi Colonel Motors a Unique Oil je 0,2 a medzi Separated Edison a Unique Oil je 0,4. Nakoniec predpokladajme, že bezriziková úroková miera pre požičiavanie a požičiavanie si je 5%. Rovnice (1) pre 3 cenné papiere sú:

$$\overline{R}_1 - R_F = Z_1\sigma_1^2 + Z_2\sigma_{12} + Z_3\sigma_{13}$$

$$\overline{R}_2 - R_F = Z_1\sigma_{12} + Z_2\sigma_2^2 + Z_3\sigma_{23}$$

$$\overline{R}_3 - R_F = Z_1\sigma_{13} + Z_2\sigma_{23} + Z_3\sigma_3^2$$

Dosadením predpokladaných hodnôt dostávame nasledovný systém simultánnych rovníc:

$$14 - 5 = 36 * Z_1 + 0{,}5 * 6 * 3 * Z_2 + 0{,}2 * 6 * 15 * Z_3$$

$$8 - 5 = 0{,}5 * 6 * 3 * Z_1 + 9 * Z_2 + 0{,}4 * 3 * 15 * Z_3$$

$$20 - 5 = 0{,}2 * 6 * 15 * Z_1 + 0{,}4 * 3 * 15 Z_2 + 225 * Z_3$$

Zjednodušíme:

$$9 = 36 * Z_1 + 9 * Z_2 + 18 * Z_3$$

$$3 = 9 * Z_1 + 9 * Z_2 + 18 * Z_3$$

$$15 = 18 * Z_1 + 18 * Z_2 + 225 * Z_3$$

Ďalším zjednodušením dostávame:

$$1 = 4 * Z_1 + Z_2 + 2 Z_3$$

$$1 = 3 * Z_1 + 3 * Z_2 + 6 * Z_3$$

$$5 = 6 * Z_1 + 6 * Z_2 + 75 * Z_3$$

Riešenie tohto systému simultánnych rovníc je:

$$Z_1 = \frac{14}{63} \qquad Z_2 = \frac{1}{63} \qquad Z_3 = \frac{3}{63}$$

Čitateľ si môže toto riešenie overiť dosadením týchto hodnôt Z_k do predchádzajúcich rovníc. Časť, ktorá má byť investovaná do každého cenného papiera, je možné ľahko určiť. Vieme, že každé Z_k je proporcionálne k X_k. Následne, všetko čo musíme urobiť na určenie X_k, je posunúť Z_k tak, aby ich súčet bol 1.

$$\sum_{i=1}^{3} Z_i = \frac{18}{63}$$

Teda, proporcie investované do každého cenného papiera sú:

$$X_1 = \frac{14}{18} \qquad X_2 = \frac{1}{18} \qquad X_3 = \frac{3}{18}$$

Očakávaný výnos portfólia je:

$$\overline{R}_P = \frac{14}{18} * 14 + \frac{1}{18} * 8 + \frac{3}{18} * 20 = 14 \tfrac{2}{3} \%$$

Rozptyl výnosov portfólia[2] je:

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{14}{18}\right)^2 *36 + \left(\frac{1}{18}\right)^2 *9 + \left(\frac{3}{18}\right)^2 *225 + 2*\left(\frac{14}{18}\right)*\left(\frac{1}{18}\right)*6*3*0,5+$$

$$+2*\left(\frac{14}{18}\right)*\left(\frac{3}{18}\right)*6*15*0,2+2*\left(\frac{1}{18}\right)*\left(\frac{3}{18}\right)*3*15*0,4=\frac{203}{6}=33\tfrac{5}{6}$$

Efektívna množina je priama čiara s interceptom na úrovni bezrizikovej úrokovej miery (5%) a sklonom rovnajúcim sa pomeru dodatočného výnosu k štandardnej odchýlke (pozri graf č. 2 v prílohe).

Krátke predaje sú povolené, ale požičiavanie a požičiavanie si za bezrizikovú úrokovú mieru nie je možné

Keď si investor neželá urobiť predpoklady, že si môže požičať a môže požičať za bezrizikovú úrokovú mieru, riešenie odvodené v predchádzajúcej časti musí byť modifikované. Avšak väčšina z analýzy môže byť stále užitočná. Uvažujme graf č.3 (Príloha). Bezriziková úroková sadzba 5 % vedie k výberu portfólia B. Ak sa však bezriziková úroková miera zmení na 4 %, potom by si investor vybral portfólio A. A nakoniec, ak by bezriziková úroková miera bola na úrovni 6 %, investor by investoval do portfólia C. Tieto pozorovania vedú k nasledujúcej procedúre. Predpokladajme, že existuje bezriziková úroková miera a nájdime optimálne portfólio. Potom predpokladajme, že existujú rôzne bezrizikové úrokové miery na požičiavanie a požičiavanie si a nájdime optimálne portfólio, ktoré korešponduje s druhou úrokovou mierou. Pokračujme v zmenách v predpokladanej bezrizikovej úrokovej miere, pokiaľ neurčíme celú hranicu efektívneho portfólia.

Je známe, že optimálny podiel investovaný do akéhokoľvek cenného papiera je jednoduchá lineárna funkcia R_F. Navyše celá hranica efektívneho portfólia môže byť

---

[2] Roypty l portfólia môže byť tiež vypočítaný iným spôsobom. Keďže λ je pomer dodatočného výnosu optimálneho portfólia vydelený rozptylom optimálneho portfólia, potom $\lambda = \frac{(\overline{R}_P - R_F)}{\sigma_P^2} = \frac{14\tfrac{2}{3} - 5}{\sigma_P^2}$.

Pripomeňme si , že $Z_i = \lambda X_i$, a teda $\sum Z_i = \lambda \sum X_i = \lambda$. Vyššie sme určili, že $\sum Z_i = \lambda = 18/63$. Vyriešením týchto dvoch rovníc získame hodnotu σ_P^2 vypočítanú vyššie.

konštruovaná ako kombinácia akýchkoľvek dvoch portfólií, ktoré na nej ležia. Identifikácia charakteristík optimálneho portfólia pre ľubovoľné dve hodnoty R_F, je postačujúca na načrtnutie celej hranice efektívneho portfólia.

Krátke predaje nie sú povolené, ale požičiavanie a požičiavanie si za bezrizikovú úrokovú mieru existuje

Tento problém je analógiou k prípadu, keď krátke predaje sú povolené a existuje bezriziková úroková miera na požičiavanie a požičanie si. Existuje jedno optimálne portfólio. Opäť je to to, ktoré maximalizuje sklon priamky spájajúcej bezrizikové aktívum s rizikovým portfóliom. Avšak množina portfólií, ktorá je dostupná na skombinovanie s požičiavaním a požičiavaním si je odlišná, pretože je pridané nové ohraničenie. Investori nemôže držať cenné papiere v záporných množstvách. Formálnejšie problém môže byť naformulovaný ako:

Maximalizovať:

$$\theta = \frac{\overline{R}_P - R_F}{\sigma_P}$$

za podmienok:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$X_i \geq 0$ pre všetky i

Toto je problém matematického programovania, pričom X_i je ohraničené ako nerovnica. Pri zbežnom pohľade by sa to mohlo zdať ako problém lineárneho programovania. Skutočne, dané ohraničenia sú lineárnymi ohraničeniami. Problémom je, že účelová funkcia (výraz, ktorý maximalizujeme) nie je lineárna. σ_p obsahuje výrazy, medzi ktoré patrí X_i^2 a X_iX_j. Rovnice s takýmito výrazmi sa nazývajú kvadratické rovnice. Pretože účelová funkcia je skôr kvadratická než lineárna, takýto problém sa nazýva problémom kvadratického programovania. Tak ako na riešenie problémov lineárneho programovania, tak aj na riešenie problémov kvadratického programovania existuje štandardný počítačový software a investor zaujímajúci sa o riešenie problémov s veľkým rozsahom by mal využiť jeden z nich.

Ani krátke predaje, ani požičiavanie a požičiavanie si za bezrizikovú úrokovú mieru nie je povolené

Pripomeňme si, že efektívna množina je ovplyvňovaná minimalizáciou rizika pri akejkoľvek úrovni očakávaného výnosu. Ak si špecifikujeme výnos na určitej úrovni a minimalizujeme riziko, dostaneme jeden bod ležiaci na hranici efektívneho portfólia. Teda, aby sme získali jeden bod ležiaci na hranici efektívneho portfólia, minimalizujeme riziko za predpokladu, že výnos je na určitej úrovni, plus ohraničenie, že suma častí investovaných do každého cenného papiera je spolu 1, a že investícia do všetkých cenných papierov je kladná alebo nulová. Toto vyvoláva nasledujúci problém:

Minimalizovať:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}$$

za podmienok:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \overline{R}_i = \overline{R}_P$$

$$X_i \geq 0 \qquad i = 1, ..., N$$

Obmieňajúc $\overline{R}_P$, medzi výnosom pri minimálnom rozptyle portfólia a výnosom pri maximálnom výnose portfólia, môžeme načrtnúť efektívnu množinu. Aj tento problém je problémom kvadratického programovania z dôvodu prítomnosti výrazov ako X_i^2 a X_iX_j. Opäť existujú štandardné softwarové balíky na ich riešenie.

Pridanie dodatočných ohraničujúcich podmienok

Zavedením ohraničujúcich podmienok krátkych predajov sa komplikuje výpočtová technika, vzhľadom na použitie kvadratického programovania. Ale keďže sme sa už rozhodli pre túto techniku, je jednoduchou záležitosťou pridať ďalšie požiadavky na riešenie. Doslova akákoľvek množina ohraničení, ktoré sa dajú naformulovať ako lineárne funkcie investičných váh, sa môže pridať k riešeniu. Napríklad, niektorí manažéri si želajú vybrať optimálne portfóliá tak, že chcú, aby dividendový výnos optimálneho portfólia bol aspoň nejaké vopred zadané číslo (napr. 2%). Ak označíme D ako cieľový dividendový výnos a d_i ako dividendový výnos akcie i, potom môžme zohľadniť túto požiadavku pridaním štvrtého ohraničenia k problému popísanému v predchádzajúcej časti:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i d_i \geq D$$

Ak si želáme dividendové ohraničenie, ale chceme povoliť krátke predaje, jednoducho z problému odstránime ohraničenie:

$$X_i \geq 0 \qquad i = 1, ..., N$$

Uvedomme si, že pridaním ohraničení v tvare nerovnice, takých akými je už popísané dividendové ohraničenie, musíme riešiť problém kvadratického programovania namiesto systému simultánnych rovníc, dokonca aj keď sú povolené krátke predaje.

Aj iné typy ohraničení sa často používajú pri riešení portfóliových problémov. Snáď najčastejšími ohraničeniami sú tie, ktoré stanovujú hornú hranicu podielu portfólia, ktorá má byť investovaná do nejakej akcie. Horné hranice sumy, ktorá môže byť investovaná do ktorejkoľvek akcie sú často časťou zmluvy vzájomných fondov. Takisto horné hranice (a príležitostné dolné hranice) sú často stanovované podľa podielu portfólia, ktorý môže byť investovaný do nejakého priemyselného odvetvia. Nakoniec, je možné zabudovať ohraničenia o meniacej sa sume v portfóliu a dovoliť porovnanie transakčných nákladov pri výpočte výnosov.

Záver

Ukázali sme techniky, ktoré môžu byť použité pri hľadaní množiny všetkých možných portfólií, ktoré sú efektívne. Všetky ukázané techniky sú prípustné a môžu byť použité na riešenie problémov spojených s množinou efektívneho portfólia. Avšak tieto techniky vyžadujú gigantické množstvo vstupných údajov a množstvo výpočtového času. Navyše vstupné údaje sú vo forme, v ktorej ich manažér portfólia nemôže ľahko spájať. Z tohto dôvodu je značne ťažké získať odhady vstupných údajov a spojiť ich do finálneho výstupu.

Zoznam použitej literatúry:

1. Elton, E. J. - Gruber, M. J. : Modern portfolio theory and investment analysis, John Wiley & Sons, New York, 1991
2. Mlynarovič, V. : Finančné modelovanie, Ekonóm, Bratislava, 1995